連立一次方程式の解法

方程式数が m 個, 未知数が n 個の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は，拡大係数行列 $[A,\boldsymbol{b}]$ に行基本変形を繰り返して 係数行列 A の部分を階段行列 B に簡約化することにより解ける事を示す：行簡約化定理により，

$$[A,\boldsymbol{b}] \quad \xrightarrow[\text{行簡約化}]{P} \quad [PA,P\boldsymbol{b}]=[B,\boldsymbol{d}] \qquad (B=PA,\ \boldsymbol{d}=P\boldsymbol{b})$$

と変形すると方程式は $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ と変形されている．このとき，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff PA\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{b} \quad (\iff B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d})$$

が, $\Rightarrow$ は P を， $\Leftarrow$ は P^{-1} を左から両辺に掛けることにより分かる．即ち，これらは同じ解を持つ．従って $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を解けばよい．ここで, 係数行列 A は $m\times n$ 行列，B は A の階段行列で,

$$\mathrm{rank}\ A=\mathrm{rank}\ B=r, \quad s=n{-}r=n-\mathrm{rank}\ A$$

rank $A{=}r<m{=}$ 方程式数 のとき B, $\boldsymbol{d}$ は

$$B=PA=\begin{bmatrix} B' \\ O \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\,r \\ \}\,m-r \end{matrix}, \qquad \boldsymbol{d}=P\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{d}'' \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\,r \\ \}\,m-r \end{matrix}$$

と分割され，方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ は $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}'$, $O\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}''$ と分割される．

場合 1**：** $\boldsymbol{d}''\neq\boldsymbol{0}$ のとき， 即ち， $d_{r+1},\ldots,d_m$ の中に 0 でない d_j があれば $\boldsymbol{0}=O\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}''$ に矛盾するのでこの方程式は**解を持たない**．このとき $[A,\boldsymbol{b}]$ の階段行列は $[B,\boldsymbol{e}_{r+1}]$ となる．従って
$\mathrm{rank}\,[A,\boldsymbol{b}]=\mathrm{rank}\,[B,\boldsymbol{e}_{r+1}]=r{+}1.$ $\quad$ $\mathrm{rank}\ A=r$ より

$$\mathrm{rank}\,[A,\boldsymbol{b}]>\mathrm{rank}\ A \tag{1}$$

場合 2**：** 場合 1 以外，即ち, $m-r>0$ で $\boldsymbol{d}''=\boldsymbol{0}$, または $r=m$ の場合: (いずれの場合も $\mathrm{rank}\,[A,\boldsymbol{b}]=\mathrm{rank}\ A$) $m=r$ のときは $B'=B$, $\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{d}$ として方程式 $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}'$ が解けることを示す．まず,

場合 2.1**:**

$$[B',\boldsymbol{d}']=\begin{bmatrix} E_r\ C\ \boldsymbol{d}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & c_{1,1} & \cdots & c_{1,s} & d_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & c_{r,1} & \cdots & c_{r,s} & d_r \end{bmatrix} \tag{2}$$

$(c_{i,j}=b_{i+r,j},\ 1\leqq i\leqq s=n{-}r,\ 1\leqq j\leqq r)$ の場合：($r{=}n$ のときは C の部分はない.) このとき方程式は

$$\begin{cases} x_1 & & + & c_{1,1}x_{r+1} & + & \cdots & + & c_{1,s}x_n & = & d_1 \\ & \ddots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ & x_r & + & c_{r,1}x_{r+1} & + & \cdots & + & c_{r,s}x_n & = & d_r \end{cases}$$

$x_1,\ldots,x_r$ の係数が 1 になる様に変形したのでこれらを残し， $x_{r+1},\ldots,x_n$ の項を右辺に移項する．$x_{r+1},\ldots,x_n$ の値は任意でよいので $t_1,\ldots,t_s$ を任意の定数として， $x_{r+1},\ldots,x_n$ に代入すれば:

$$\begin{cases} x_1 & = & d_1 & - & c_{1,1}t_1 & - & \cdots & - & c_{1,s}t_s \\ & \vdots & & & & & & & \\ x_r & = & d_r & - & c_{r,1}t_1 & - & \cdots & - & c_{r,s}t_s \\ x_{r+1} & = & & & t_1 & & & & \\ & \vdots & & & & & \ddots & & \\ x_n & = & & & & & & & t_s \end{cases}$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -c_{1,1} \\ \vdots \\ -c_{r,1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -c_{1,2} \\ \vdots \\ -c_{r,2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_s \begin{bmatrix} -c_{1,s} \\ \vdots \\ -c_{r,s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

即ち，$C = [\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_s]$ とし，$\boldsymbol{e}_i = {}^t[0 \cdots 1 \cdots 0]$ (s 次元の基本ベクトル) とするとき，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} + \cdots + t_s \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_s \\ \boldsymbol{e}_s \end{bmatrix} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{d}} + t_1 \boldsymbol{x}_1 + t_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{x}_{n-r} \qquad \left(\boldsymbol{x}_j = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_i \\ \boldsymbol{e}_i \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

となり，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の全ての解を得た．$r = n$ のときは $B' = E_n$ であり唯 1 つの解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}'$ を得る．

場合 2.2： B が一般の階段行列のとき． 軸列である $q_1, \ldots, q_r$ 列の $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ を第 $1, \ldots, r$ 列に移動する．残りの列は 第 $(r+1), \ldots, n$ 列に移り，(2) 式と同じ $\begin{bmatrix} E_r & C & \boldsymbol{d}' \\ O & O & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ の形になる． この操作は未知数 $x_1, \ldots, x_n$ の順序を入れ替えて $y_1 = x_{q_1}, \ldots, y_r = x_{q_r}$ とし， 残りの x_i を順に $y_{r+1}, \ldots, y_n$ としたものの係数行列に対応している．このとき， $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = {}^t[y_1 \cdots y_n]$ で置き換えれば上記と全く同様にして

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} + \cdots + t_s \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_s \\ \boldsymbol{e}_s \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{d}'} + t_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{y}_{n-r}
$$

と解が得られ，これを元の順に戻すことにより，全ての解

$$
\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{d}} + t_1 \boldsymbol{x}_1 + t_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{x}_{n-r} \qquad (r = \mathrm{rank}\ A)
$$

が得られる．この形の解を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の **一般解**という．また， $\widetilde{\boldsymbol{d}}$ は一つの解になっており，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の **特殊解**という．$\mathrm{rank}\ A = r = n$ のときは $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ の部分はなく $\widetilde{\boldsymbol{d}}$ が唯 1 つの解になる．
$\mathrm{rank}\ A = r < n$ のとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の **基本解**という．
また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の全ての解を表すのに必要な任意定数の個数

$$
n - r = n - \mathrm{rank}\ A
$$

を **解の自由度** という．これは基本解の個数に一致している．以上をまとめて次の定理を得た．

定理 1 (連立一次方程式の解) 未知数が n 個の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において次が成り立つ．
(1) $\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] > \mathrm{rank}\ A$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもたない．
(2) $\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\ A = n$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯 1 つの解をもつ．
(3) $\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\ A < n$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は無限個の解をもち，解の自由度は $n - \mathrm{rank}\ A$ である．

注意 1 $[A, \boldsymbol{b}]$ が実行列 (有理行列) のときは $[B, \boldsymbol{d}]$ も実行列 (有理行列) になる．連立一次方程式の解は $[B, \boldsymbol{d}]$ の列ベクトルと基本ベクトルより構成されるので，実係数の連立一次方程式で，定数項も全て実数ならばその特殊解および基本解も実ベクトルに取れる．係数と定数項が全て有理数ならば特殊解および基本解も有理ベクトルに取れる．
$[B, \boldsymbol{d}]$ は $[A, \boldsymbol{b}]$ から計算機を用いて計算できので連立一次方程式の特殊解と基本解の組も計算機を用いて計算できる．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の基本解は A の階段行列 B から取り出した $\boldsymbol{c}_i$ と $\boldsymbol{e}_i$ から作られており，$\boldsymbol{b}$ によらずに定まっている．特に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{d} = P\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より， $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解になっている．この形の方程式を **同次形** あるいは **斉次形** の連立一次方程式，または 同次（連立）一次方程式，斉次（一次）方程式系などという．このことを用いて連立一次方程式の解を検算する事が出来る．