行列の分割

定理　(分割された行列の積)
$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$,　$m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ とそれらの積 $C = AB = [c_{ij}]$ が

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix}$$

と分割されていて，A_{st} が (l_s, m_t) 型，B_{tu} が (m_t, n_u) 型，C_{su} が (l_s, n_u) 型とする．即ち A_{st} と B_{tu} は積の取れる型，C_{su} はそれらの積の型となる様分割されているとする．ここで

$$l = l_1 + \cdots + l_p, \quad m = m_1 + \cdots + m_q, \quad n = n_1 + \cdots + n_r$$

である．このとき

$$C_{su} = \sum_{t=1}^{q} A_{st} B_{tu} = A_{s1} B_{1u} + \cdots + A_{sq} B_{qu} \tag{1}$$

が成り立つ．即ち分割された行列の積は普通の行列の積と同様に計算される．

証明. 添え字の対応のみが問題である：
(1) の両辺の (v, w) 成分 が等しいこと, つまり $(C_{su})_{vw} = (\sum_{t=1}^{q} A_{st} B_{tu})_{vw}$ を示す.
C の (i, j) 成分 c_{ij} が C_{su} の (v, w) 成分 $(C_{su})_{vw}$ に対応しているとする．即ち

$$i = l_1 + \cdots + l_{s-1} + v, \qquad j = n_1 + \cdots + n_{u-1} + w$$

とする．また

$$M_t = m_1 + \cdots + m_{t-1} \quad (t = 1, \cdots, q+1 \quad \text{ただし } M_1 = 0, \quad M_{q+1} = m), \qquad k = M_t + h$$

とすると, A_{st} の (v, h) 成分 $(A_{st})_{vh}$ が A の (i, k) 成分 a_{ik} に B_{tu} の (h, w) 成分 $(B_{tu})_{hw}$ が B の (k, j) 成分 b_{kj} に対応している．このとき

$$(A_{st} B_{tu})_{vw} = \sum_{h=1}^{m_t} (A_{st})_{vh} (B_{tu})_{hw} = \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik} b_{kj} \quad (M_t + m_t = M_{t+1}),$$

$$(C_{su})_{vw} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik} b_{kj} = \sum_{t=1}^{q} (A_{st} B_{tu})_{vw} = (\sum_{t=1}^{q} A_{st} B_{tu})_{vw}$$

より定理は証明された.　□