

ゲームの木

-- 合理的思考の技術 Lecture 6 --

小林憲正

VALDES

Tokyo Institute of Technology

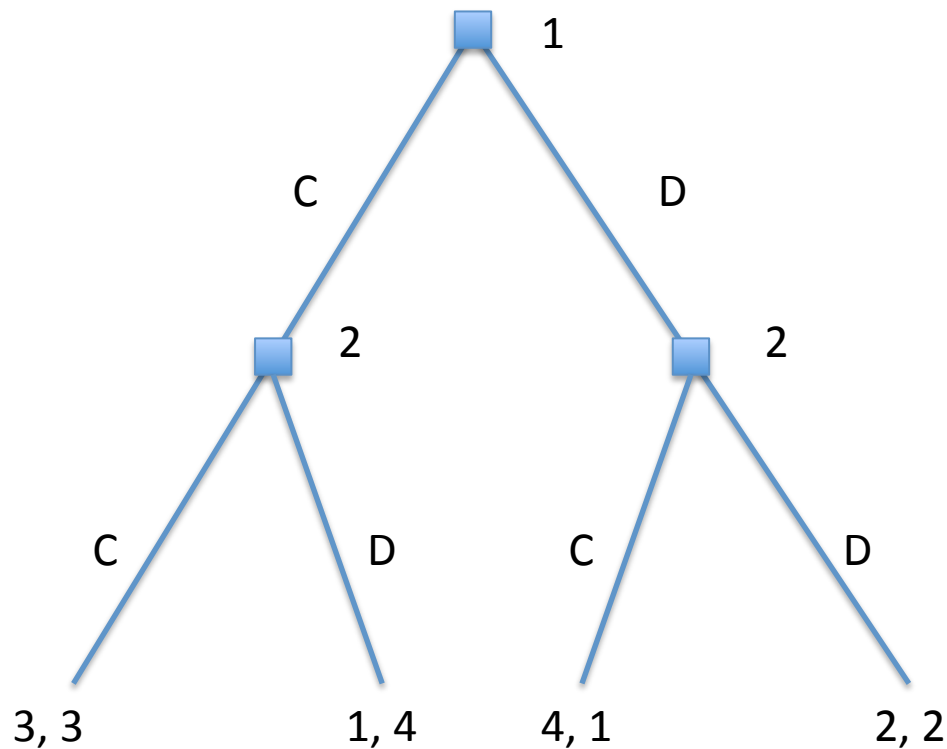
ゲームの木 Game Tree と 戦略 Strategy

- ゲームの木 game tree
 - 決定ノードは、プレイヤーの手番
 - 不確実性ノードは、**自然 nature** と呼ばれることもある
 - 終端ノードには、それぞれのプレイヤーの効用

標準形に対して、木を用いたゲームの表現を**展開形 extensive form** という。

- ゲームの木におけるプレイヤーの戦略
 - **戦略 strategy** とは、そのプレイヤーの各決定ノードにおける選択をすべて並べたもの

例) 2段階囚人のジレンマ

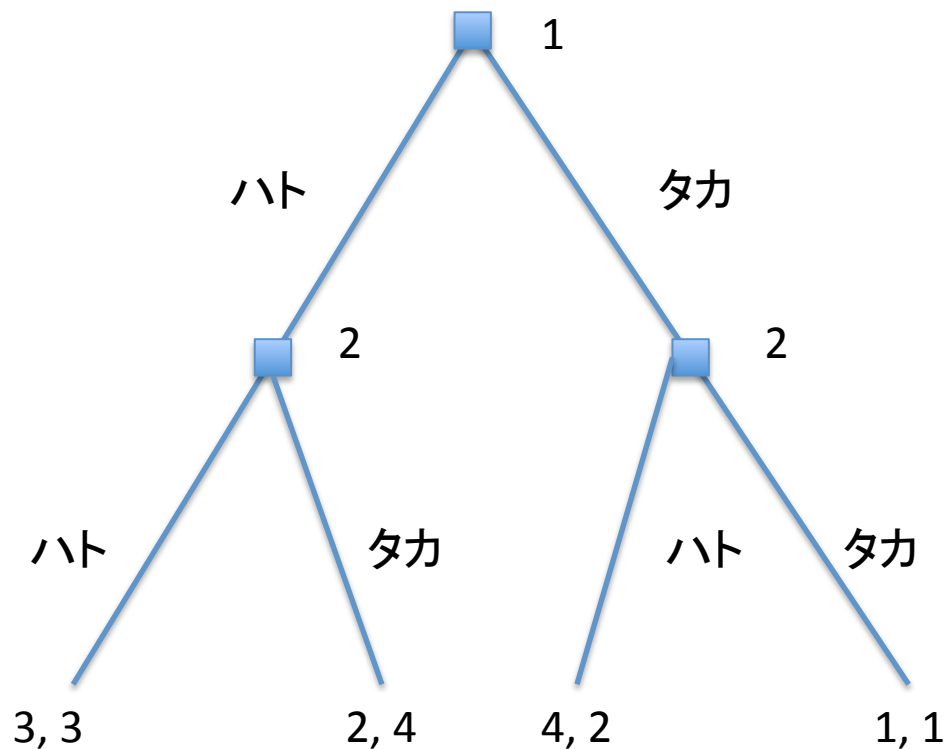


戦略の集合

$$S_1 = \{C, D\}$$

$$S_2 = \{C, D\}^2$$

例) 2段階チキン

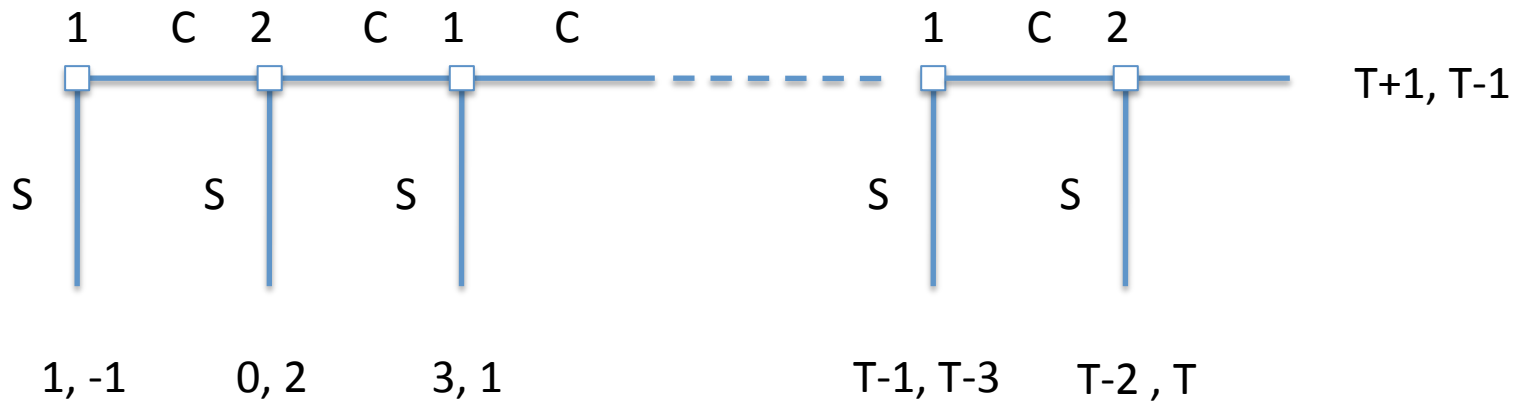


戦略の集合

$$S_1 = \{\text{ハト}, \text{タカ}\}$$

$$S_2 = \{\text{ハト}, \text{タカ}\}^2$$

ムカデゲーム Centipede Game



- S = Selfish, C = Cooperative、のイメージ
- 各決定ノードで、それぞれのプレイヤーは S をプレーする方が、自分が C をプレー直後に相手に S をプレーされるよりは得だが、相手が一回 C をプレーしてくれれば、そっちの方が得

後ろ向き帰納法

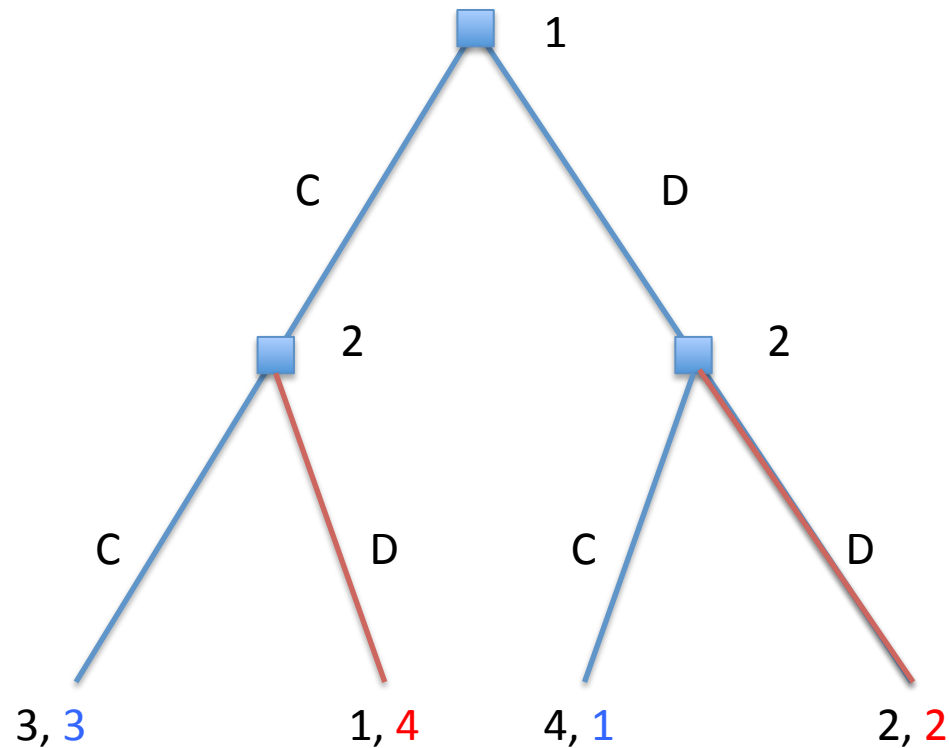
Backward Induction

アルゴリズム:

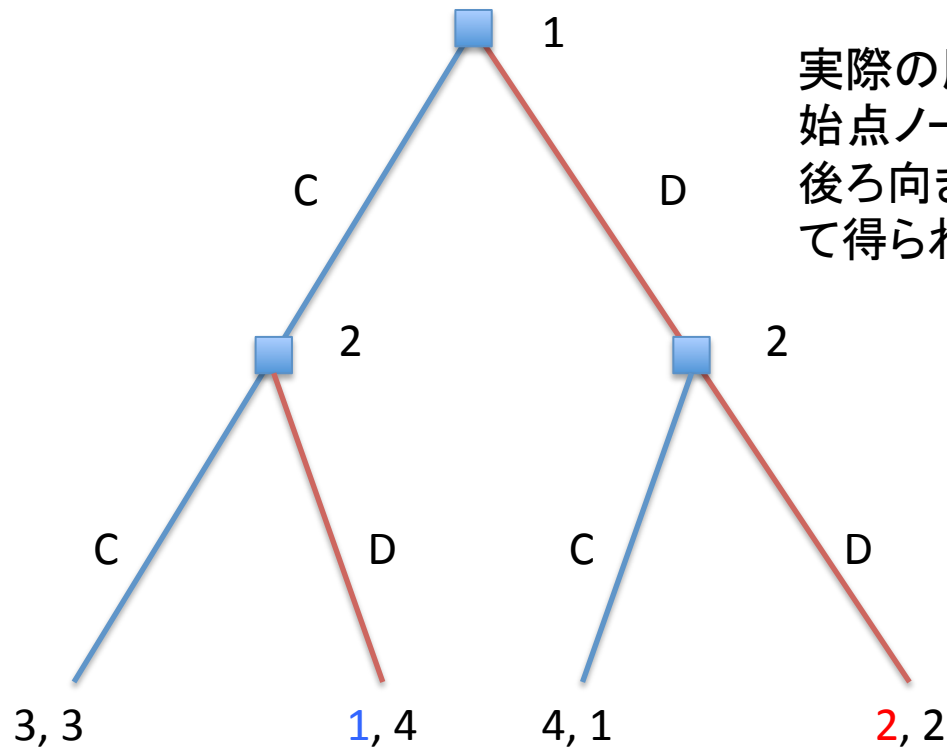
- 終端ノードから出発
- それぞれのプレイヤーが決定ノードで効用最大化したとして、そのプレイヤーが選んだ枝と付随する効用値で置き換える
- 不確実性ノードについては、期待効用をその評価値とする

ゲームの木の後ろ向き帰納法の解のことを
部分ゲーム完全ナッシュ均衡 subgame-perfect Nash equilibrium (SPNE) という

例) 2段階囚人のジレンマ



例) 2段階囚人のジレンマ



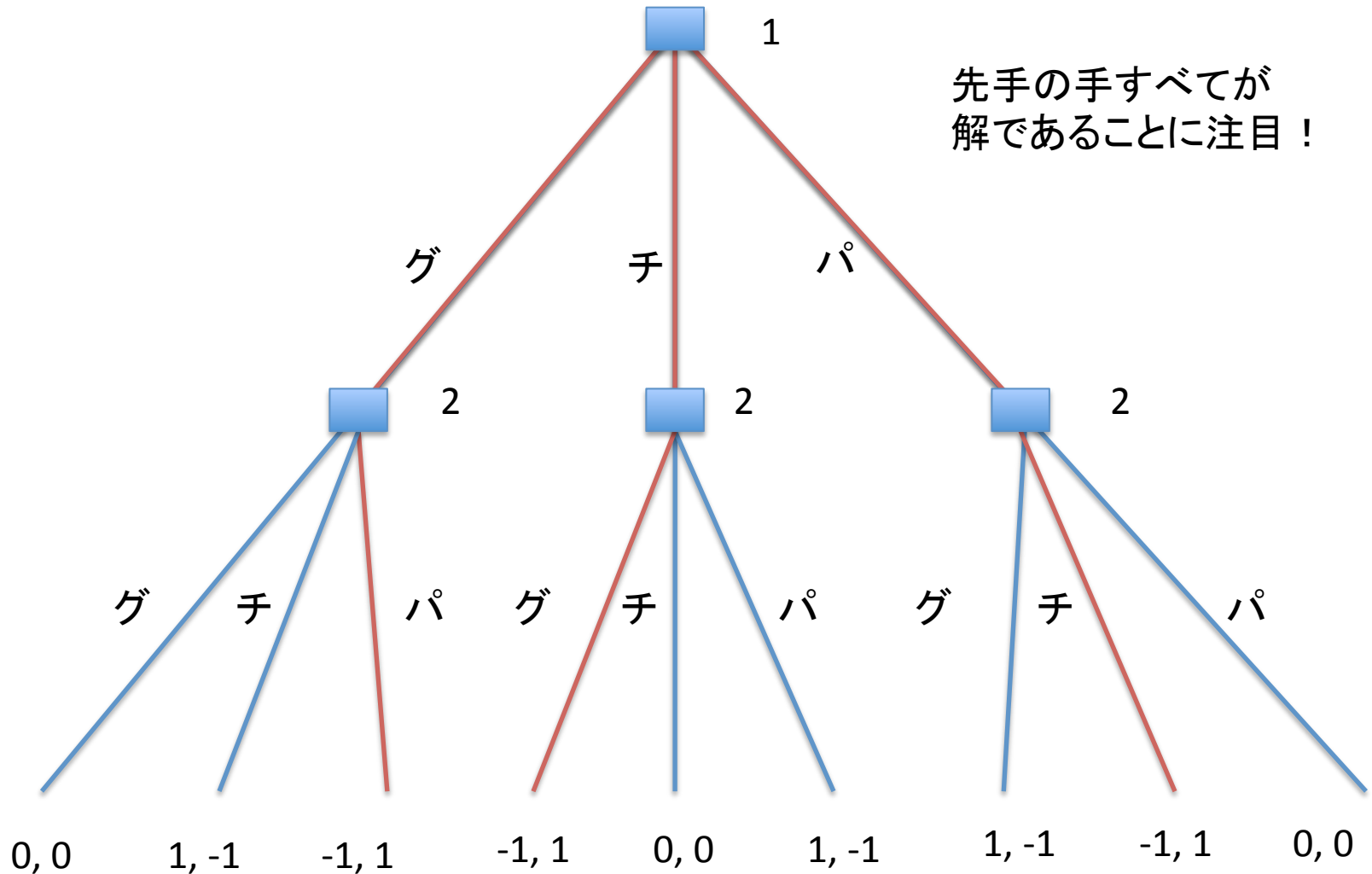
実際の歴史(履歴) history は、
始点ノードから、
後ろ向き帰納法の解をつなげ
て得られる。

他のプレイヤーのプレーの 情報の価値

- 後ろ向き帰納法は、未来の情報しか使わないので、後にプレーするプレイヤーにとって、過去のプレイヤーのプレーは、原則知る必要がない。
(後に、過去のプレイヤーのプレーが重要となる場合も扱う)
- 囚人のジレンマゲームの場合は、支配戦略が存在するので、プレイヤー1もプレイヤー2の戦略を知る必要はない。
(ゲームの木の場合も、支配戦略は同様に定義できる)

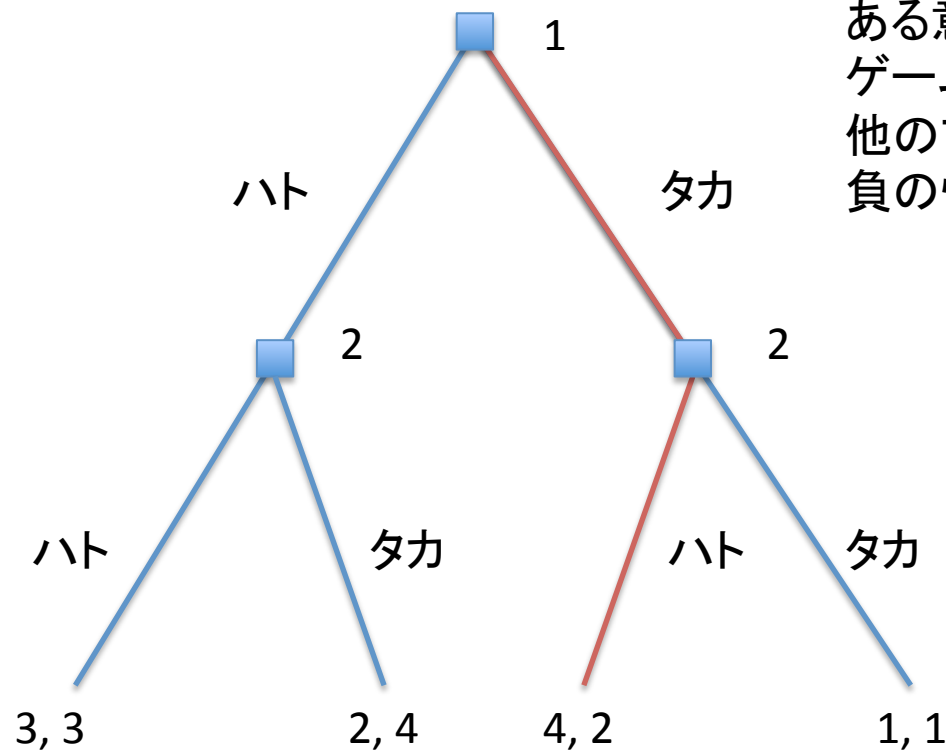
他のプレイヤーの過去の手を知ることの意味

例) じゃんけん



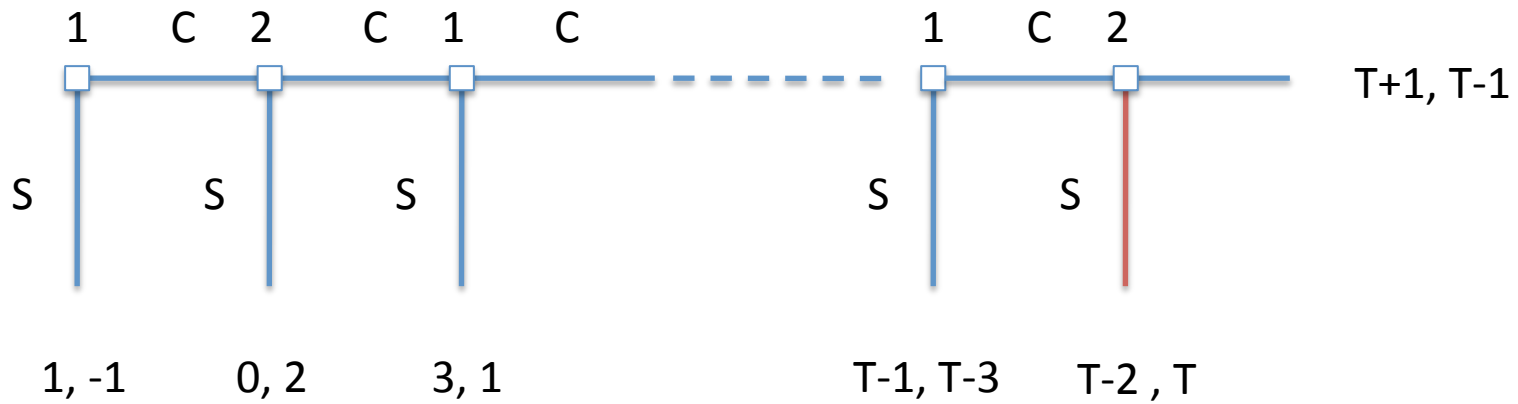
コミットメント Commitment 効果 ファースト・ムーバが得する場合

例) 2段階 チキンゲーム

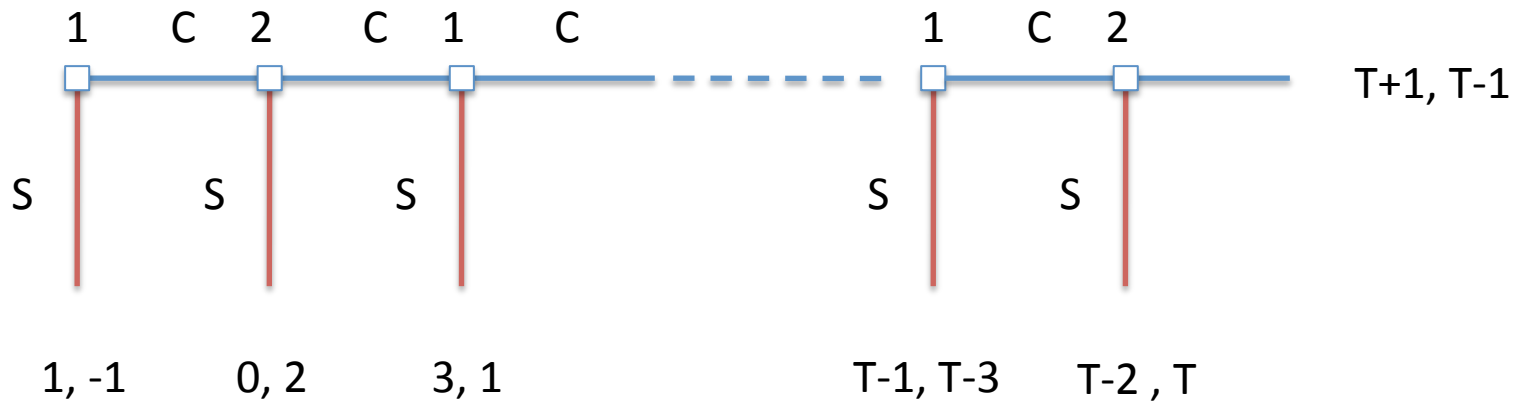


ある意味、
ゲーム状況では、
他のプレイヤーの手を知ることが
負の情報の価値を持つことがあり得る！

ムカデゲーム Centipede Game



ムカデゲーム Centipede Game



結局、後ろ向き帰納法の解では、初回にプレイヤー1がSをプレーしてゲームが終わる。

完全情報ゲームの拡張と 部分ゲーム完全均衡

- これまであつかったゲームの木は、過去の他のプレイヤー（自然も含む）のプレーが全て見えるという意味で**完全情報 perfect information** であると呼ばれる。
- 各決定ノードを同時決定ゲームで置き換える拡張がしばしば便利。

定義： 各決定ノードの解をそのナッシュ均衡で置き換えた後ろ向き帰納法の拡張で得られる戦略の組を**部分ゲーム完全ナッシュ均衡 subgame-perfect Nash equilibrium (SPNE)** であるという。

有限回繰り返しゲーム

- ステージ・ゲームを有限回(=T)繰り返すゲーム

$$h = (a^1, \dots, a^T)$$

- 全体の利得は、T回で得られた利得の平均
(各回の利得の合計とする定義もある)

$$\sum_{t=1}^T u_i(a^t) / T$$

有限回繰り返しゲームの SPNE

定理： ステージ・ゲームのナッシュ均衡が唯一のとき、任意の T 期の有限回繰り返しゲームの唯一の SPNE は、ステージ・ゲームのナッシュ均衡を T 回繰り返すもの

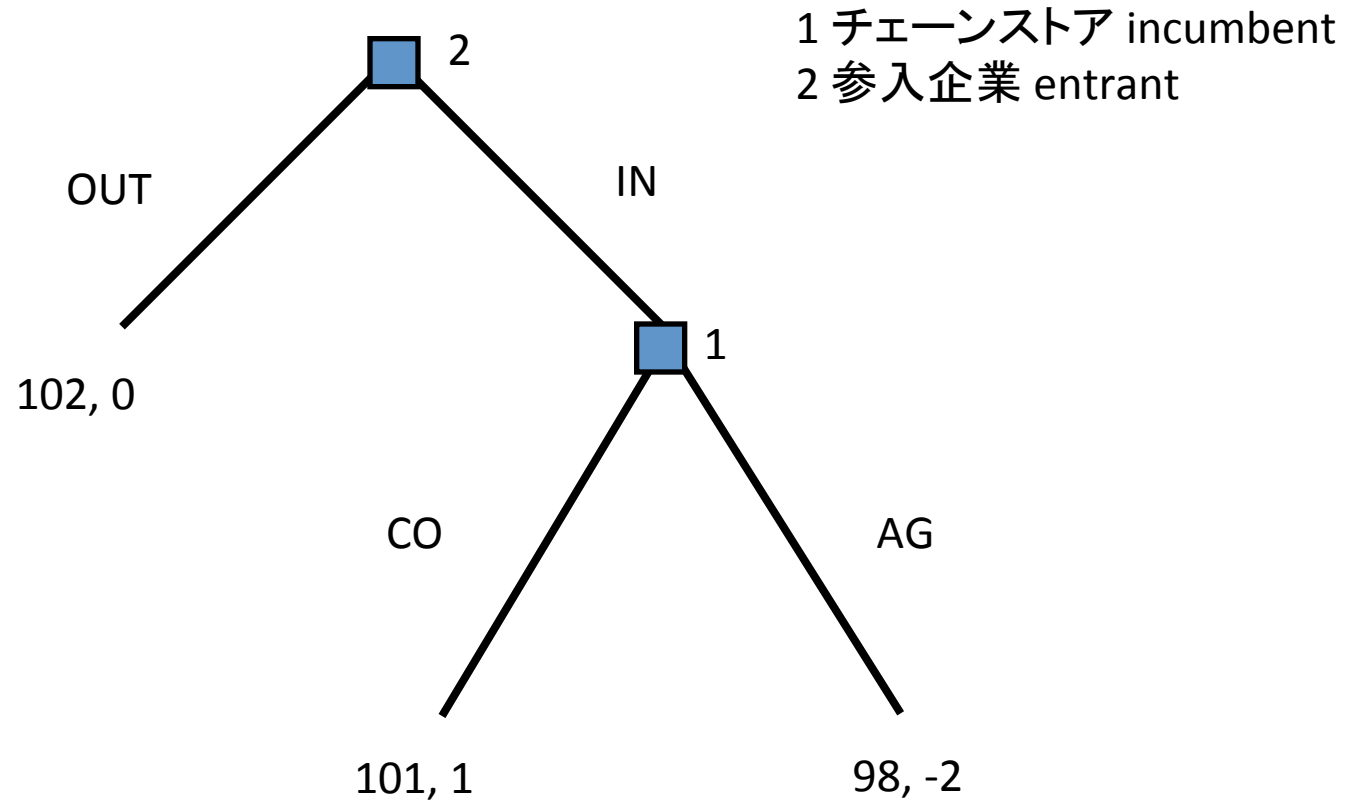
証明は、数学的帰納法による。

ステージ・ゲームに複数の均衡点がある場合は、最終期近くに利得が低い方の均衡戦略をプレーするぞ！という信憑性のある制裁によって、より協力的な SPNE を達成することができる。

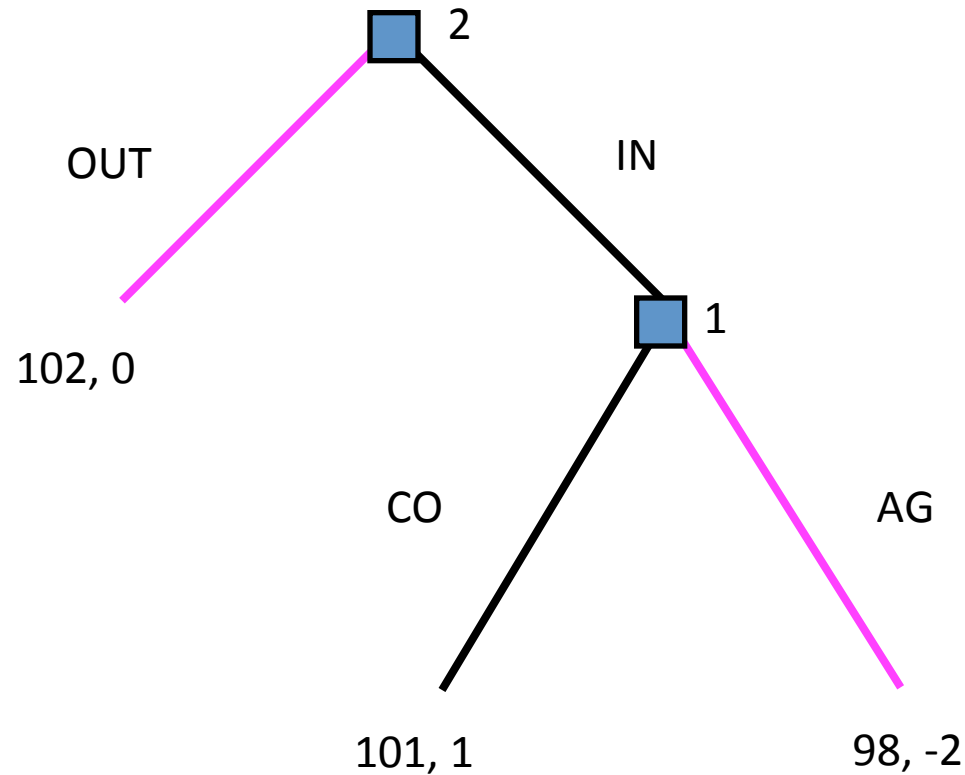
ゲームの木の一般のナッシュ均衡

- ゲームの木における戦略が、すべての決定ノードでのプレーの計画であることを思いだそう。
- **戦略の組**がナッシュ均衡であるとは、その組から任意の一人のプレーヤーのみ逸脱したプレーをした場合に、そのプレーヤーが利益を得られないことをいう。
- SPNE でないナッシュ均衡も存在する。

例) チェーンストア・ゲーム

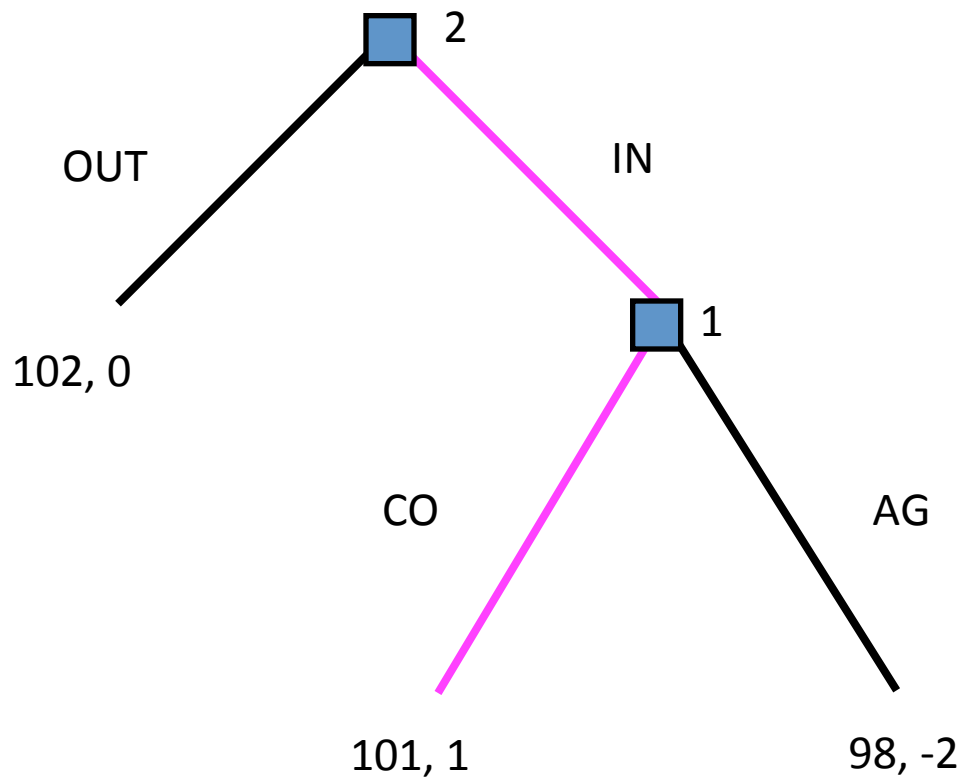


チェーンストア・ゲームの ナッシュ均衡の一つ (SPNE ではない !)



チェーンストア・ゲーム

もちろん SPNE もナッシュ均衡



制裁の信憑性

- チェーンストアゲームの SPNE でないナッシュ均衡の解釈は、チェーンストアによる脅しに参入企業が屈した格好と解釈できる。
- しかし、**実際に参入企業が参入すると、**チェーンストアにとっては妥協する方が得。このことを考慮したのが SPNE。
- SPNE に矛盾するようなコストのかかりすぎる脅しのことを**信憑性のない脅し incredible threat** という。

後ろ向き帰納法が疑わしい理由 I

合理性の共有知識 Common Knowledge

- 自分は合理的としても、本当に相手も合理的？
 - 自分が合理的であったとしても、他のプレイヤーが合理的と思わなくなった瞬間に、
(= 合理性の共有知識 common knowledge of rationality (CKR) の欠如)
必ずしも後ろ向き帰納法は有効でない！
 - 例) 囲碁で上手が下手と打つ場合、しばしば相手の「下手な手」を想定して、それに対する最適応答を考える。
 - 共有知識の絡む例) 恋愛で、両思いでも、うまく告白をかませないと、不必要なツンデレ状態とかがあり得る。

後ろ向き帰納法が疑わしい理由 II

反実仮想！？

- 後ろ向き帰納法は、すべての決定ノードでのプレイヤーの「合理性」を前提にしているが、
解の歴史のパス path 上以外は、すべてのパス上で、
過去にプレーした少なくとも一人のプレイヤーが非合理的！
→ これって、定義と矛盾じゃない？！
極端な例) ムカデゲーム、チェーンストア・パラドックス
- ほとんど唯一の後ろ向き帰納法の正当化は、過去の
後ろ向き帰納法によらない手がすべてケアレス・ミス
であったという解釈。(=震える手 trembling hand)

戦略的非合理性

- 多数回繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて、数回くらいの裏切りの損くらいは眼をつぶれる
→ (C, C) ばかり繰り返すのも解になり得る！！！！

€ ナッシュ均衡

- ムカデゲームで、あえてCをプレーすることにより、CKR が満たされていないことを**アピール**！！
- 繰り返しチェーンストアゲームにおける評判 reputation の構築

繰り返しゲームにおける戦略の例

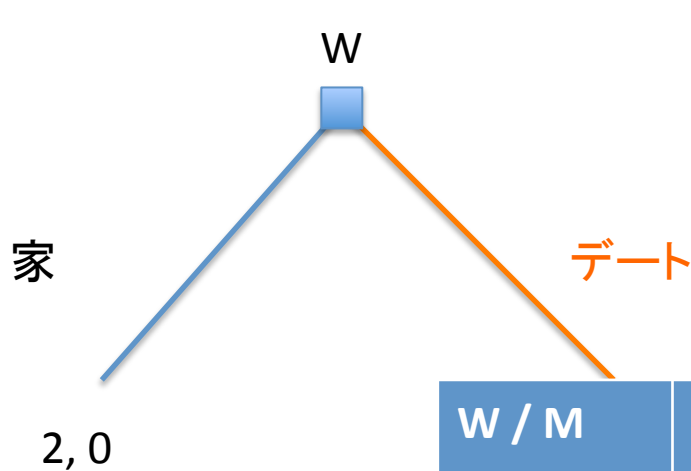
- トリガー戦略
 - 相手が協力している間は協力し続ける
 - 相手が一度でも裏切ったら、自分も裏切られた次の期以降ずっと裏切り続ける
- 有限回繰り返しゲームで互いにトリガー戦略をとっているとき、相手より一期早く裏切るのが最適
- 相手が裏切る期がわからない場合、また、自分が裏切る期をわからないように演出する場合、
SPNE 以外のプレーもあり得るだろう。

非合理性・コミットメントの信憑性を確保する方法

- 代理人をたてて、その人に実際の利益と別の効用をインセンティブとして与える
 - 企業経営で利潤最大化 profit maximization ではなくて売上最大化 sales maximization を経営陣に指示した(つまり、売上が最大の時にボーナスが出る)とすると、チェーン・ストアゲームで AG をとりやすくなり、制裁の信憑性が増すかもしれない。
 - 外交におけるブラフ
- 感情 – 進化と情操教育によって生じるだろう
(付け焼き刃で感情を醸成・コントロールすることは困難)
 - 裏切りに対して「怒る」感情は協力を維持しやすい。
 - 宗教や倫理的な人にとっての戒律を破る「罪悪感」
 - 恋愛感情は協力を促進するだろう
(だから、特に女性にとって、相手が自分のことを「愛している」ことがしばしば大問題)

そもそも、効用の起源がなんであるかというのは、結構難しい！！！！

前向き帰納法 Forward Induction



W の主張「スポーツを選ぶくらいならば、家にいる」
→ デートゲームでは美術館が選ばれる？
→ もし yes なら、デートの時に(スポーツ、スポーツ)をナッシュ均衡とし、それゆえ W が家にいるという SPNE は、解とならなくなる

W / M	美術館	スポーツ
美術館	3, 1	0, 0
スポーツ	0, 0	1, 3

過去には、原則興味がないはずだけど。。。

後ろ向き帰納法や前向き帰納法のように、納得のいく基準を満たすナッシュ均衡のみを解とみなし、ナッシュ均衡に基づく行動の予測精度を高めようとする方法を均衡の**精緻化 refinement** という。

まとめ

- 完全情報ゲーム
- 後ろ向き帰納法と部分ゲーム完全ナッシュ均衡 SPNE
- 一般のナッシュ均衡と制裁の信憑性
- ゲームの解の問題点と戦略的非合理性
- SPNE の緩和と精緻化