

標準形ゲーム Normal-Form Game と ナッシュ均衡 Nash Equilibrium

– 合理的思考の技術 Lecture 5 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

May 9, 2011

標準形ゲーム Normal-Form Games

意思決定分析のプロトタイプを複数の意思決定主体の相互作用状況の表現に自然に拡張したのが標準形ゲーム。

Definition (標準形ゲーム Normal-Form Game)

$\langle N, A, u \rangle$:

- $N = \{1, \dots, n\}$ プレーヤーの集合 a set of players
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ 行動の組の集合 a set of action profiles
- $u = (u_1, \dots, u_n)$ 利得の組 a payoff profile
($u_i : A \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$)

- ゲーム理論では、意思決定主体のことを **プレーヤー player**、効用のことを **利得 payoff** ということが多い。
- 経済学では、ベクトルを普通の文字で書くなど、独自の数学記号を使うことがある。

標準形ゲームと同時決定 Simultaneous Move

- 標準形ゲームは、相手の取る行動を知らずに自分の行動を決めることから、同時決定ゲームといわれることもある。
- しかし、物理的に厳密に同時である必要は必ずしもない。

Example (物理的に同時に決定するわけではない実例)

待ち合わせ 実際に現場で顔を合わせるまで、厳密には、相手がどこに
来ているかわからない。

秘密投票など 他の有権者の投票行動は知らないで投票を行うが、全員
が同時に投票するわけではない。

標準形ゲームの双行列 bimatrix 表現

2人ゲームは、特に、行プレイヤー row player (行動を行に羅列) と列プレイヤー column player (行動を列に羅列) の利得を順番に並べたものを行列のそれぞれのセルに書く表現が可能。

Example (じゃんけん)

プレイヤー 1, 2 による2人じゃんけんを双行列表現してみよう。
ただし、勝ち、あいこ、負けによって得られる利得をそれぞれ $1, 0, -1$ とする。

1\2	グー	チョキ	パー
グー	0, 0	1, -1	-1, 1
チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
パー	1, -1	-1, 1	0, 0

じゃんけんは、**ゼロ和ゲーム zero-sum game** の一種である。

超有名なゲームの例

Definition (囚人のジレンマ Prisoner's Dilemma)

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

社会における規範 norm、協力 cooperation や信頼 trustなどをモデル化する際に最も良く使われるゲームモデル。

Definition (チキン Chicken もしくは 鷹鳩 Hawk-Dove)

	ハト	タカ
ハト	3, 3	1, 4
タカ	4, 1	0, 0

進化ゲーム理論 evolutionary game theory において、特に重要なゲーム。

戦略と最適応答 Best Response

プレイヤー i の行動の決め方を **戦略 strategy** という。ゲームの最も基本的な考え方は、他のプレイヤーの戦略を不確実性とみなして、期待効用を最大化することである。

Definition (最適応答 best response)

他のプレイヤーの行動の組の集合上の確率分布での予測 conjecture $\phi \in \Delta(A_{-i})$ に対する最適応答 $a_i^* \in A_i$ とは、

$$a_i^* \in B_i(\phi) := \arg \max_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \phi(a_{-i}) u(a_i, a_{-i})$$

特に、他のプレイヤーの行動 a_{-i} に対する最適応答の集合は、

$$B_i(a_{-i}) := \arg \max_{a_i \in A_i} u(a_i, a_{-i})$$

しかし、一人意思決定の場合と異なり、他のプレイヤーのとり戦略の確率分布が与えられているわけではない。

弱支配戦略 Weakly Dominant Strategy

他のプレイヤーの戦略を知らずに自分の最適戦略を決定できる場合(他のプレイヤーのプレーの情報の価値はゼロ) は以下で特徴付けられる。

Definition (弱支配戦略 Weakly Dominant Strategy)

$a_i^* \in A_i$ が弱支配戦略であるとは、 $\forall a_{-i} \in A_{-i}$

$$a_i^* \in B_i(a_{-i})$$

Example (Second Price オークション)

Yahoo! オークションの自動入札システムのように、2番目に高い入札額で落札額を決定する方式を second price auction という。

Q. second price auction を標準形ゲームとして定式化して、各プレイヤーにとって自分の評価額を正直に入札することが支配戦略となることを示せ。

支配戦略均衡の例 – 囚人のジレンマ

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

Figure: 1's dominant strategy

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

Figure: 2's dominant strategy

(D, D) が唯一の支配戦略均衡

社会状態の効率性 Efficiency

Definition (パレート支配 (Pareto Dominance))

社会状態(=行動の組) $a \in A$ が $b \in A$ をパレート支配している iff

$$(\forall i \in N) u_i(a) \geq u_i(b)$$

Example (社会的ジレンマ Social Dilemma)

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

囚人のジレンマの唯一の支配戦略均衡 (D, D) は (C, C) にパレート支配されている。

ナッシュ均衡 Nash Equilibrium

一般には、他のプレイヤーが取る戦略に依存して、自分の最適戦略は変化する。同様に、他のプレイヤーの取る戦略は、一般には自分の取る戦略に依存するだろう。

そこで、全てのプレイヤーのプレーが互いに最適になっているような場合を考える。

Definition (ナッシュ均衡 Nash Equilibrium)

行動の組 $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in A$ がナッシュ均衡であるとは、

$$(\forall i \in N) a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$$

ナッシュ均衡は、しばしばゲームの **解 solution** と呼ばれるが、全てのゲームに対して唯一定まるわけではないし、これをプレーするべきと必ず言えるわけでさえない。

ナッシュ均衡の例 – チキンゲーム

	dove	hawk
dove	3, 3	1, 4
hawk	4, 1	0, 0

Figure: 均衡 (dove, hawk)

	dove	hawk
dove	3, 3	1, 4
hawk	4, 1	0, 0

Figure: 均衡 (hawk, dove)

ナッシュ均衡の存在定理

Theorem (ナッシュ均衡の存在定理[7])

以下の条件を満たす標準形ゲーム $\langle N, A, u \rangle$ はナッシュ均衡を持つ。 $\forall i \in N$:

- A_i がユークリッド空間 Euclidean space の非空 nonempty でコンパクト compact かつ凸 convex な部分集合
- u_i が連続 continuous かつ A_i 上で擬凹 quasi-concave

くわしい数学や証明などについては、講義サイトに紹介してあるゲーム理論の教科書を参照のこと。

ゲームの混合拡張[8]

Definition (混合拡張 Mixed Extension)

標準形ゲーム $\langle N, A, u \rangle$ の混合拡張とは、次の標準形ゲーム $\langle N, \times_{j \in N} \Delta(A_j), U : \times_{j \in N} \Delta(A_j) \rightarrow \mathbb{R}^N \rangle$:

- $\Delta(A_i)$ はプレイヤー $i \in N$ の混合戦略 **mixed strategy** の集合
- $U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \cdot u_i(a)$ はくじ $\alpha \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)$ の期待効用

確率1でいずれかの行動 $a_i \in A_i$ を選択する戦略を **純粋戦略 pure strategy** という。

Corollary (混合戦略のナッシュ均衡の存在定理)

任意の有限標準形ゲームは混合戦略ナッシュ均衡を持つ。

Example (じゃんけん)

二人じゃんけんの混合戦略ナッシュ均衡は唯一存在し、両者が $1/3$ ずつの確率で、それぞれグー、チョキ、パーを出す。

混合戦略ナッシュ均衡の性質・問題点

Proposition (サポートの全てが最適応答)

混合戦略の組 $\alpha^* = (\alpha_i^*)_{i \in N} \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)$ がナッシュ均衡である iff $\forall i \in N$ について、 $\forall a_i \in \text{supp } \alpha_i^*$ が α_{-i}^* に対して最適応答となっている

つまり、特に、正確に α_i^* の確率分布に従ってプレーする強いインセンティブがあるわけではない。

Example (じゃんけん)

二人ジャンケンにおいて、相手がグー、チョキ、パーを等確率でだしてくれば、自分はなにを出しても同じ利得が得られる。

本講義では、ほとんど純粋戦略しか扱わない。

ナッシュ均衡の基本性質

誘因両立性 incentive compatibility ナッシュ均衡は、戦略の組の指示するとおりにプレーすることが、各プレーヤーの効用最大化と整合的

均衡の複数性 multiplicity 一つのゲームに対してナッシュ均衡は複数存在し得る

局所最適性 local optimality ナッシュ均衡は、あくまでも特定の戦略に対しての最適応答であることしか担保しない

ナッシュ均衡の解釈(応用) [6]

予測 Prediction の必要条件 社会科学的予測が**唯一**の純粹戦略の組によって特徴付けられるとすれば、それがナッシュ均衡であることが安定性の**必要**条件(十分条件でないことに注意!!!)

フォーカル・ポイント Focal Point[9] 人々が思い浮かべる社会状態が安定であるための必要条件

拘束力の合意 Enforceable Agreement プレーヤーが合意に従うための必要条件

安定な社会的慣習 Social Convention しばしば、進化ゲームのプレーの収束先としても特徴付けられる

社会における慣習と均衡選択

Example (調整ゲーム – 交通)

	左	右
左	1, 1	0, 0
右	0, 0	1, 1

左側通行(= (左, 左)) と右側通行(= (右, 右)) はともに純粋戦略のナッシュ均衡。

- 調整ゲームの場合、均衡選択は、歴史(例えば、日本で言えばイギリスの制度を導入したとか) などゲームの外側の要因による。
- 調整ゲームの場合は、均衡で合意すること自体には文句はなさそう。

比較制度分析 Comparative Institutional Analysis[1]

- ゲーム理論の歴史の初期は、ゲームの情報のみから、唯一のゲームのプレーを解として理論的に導出しようとしていた[5]。
- しかし、調整ゲームのように、根本的に、理論的に唯一のプレーを定めるのが無理であるゲームで社会現象をうまく説明できそうだとする立場が現在は優勢[2, 4, 3]。社会制度の多様性の原因をゲーム自体というよりは、均衡選択で主に説明しようとすることもある。[1]

複数均衡で利害対立がある場合と合意

	ハト	タカ
ハト	3, 3	1, 4
タカ	4, 1	0, 0

- チキンゲームには、均衡が二つあるが、損する方のプレーヤーのみが譲歩すべき強い理由は見当たらない。つまり、どちらかのナッシュ均衡で合意をすることはあまり現実的と思えない。
- といって、例えば(ハト、ハト) はナッシュ均衡でないため、拘束力のある合意とはなり得ない。

メカニズム・デザイン Mechanism Design

通常、ゲーム理論では、ゲームが先に与えられて、その均衡の性質を調べることとなるが、逆に達成したい社会状態に応じてゲームを設計 design する立場をメカニズム・デザインという。

Example (制裁付き囚人のジレンマ)

	C	D
C	3, 3	-1, 5 - 10
D	5 - 10, -1	1, 1

囚人のジレンマにおける裏切りに対して手痛い制裁(-10のペナルティー)を導入することによって (C, C) がナッシュ均衡となり得る。

- 標準形ゲーム
- 二つの解概念
 - 支配戦略
 - ナッシュ均衡
- ナッシュ均衡の性質と適用する際の注意点



Masahiko Aoki.

Toward a Comparative Institutional Analysis.
MIT Press, Cambridge, 2001.



C. Bicchieri.

Norms of cooperation.
Ethics, pages 838–861, 1990.



C. Bicchieri.

The grammar of society: The nature and dynamics of
social norms.
Cambridge Univ Press, 2006.



Cristina Bicchieri.

Rationality and Coordination.
Cambridge University Press, Cambridge, 1993.



C. Harsanyi, John and Reinh Selten.

A General Theory of Equilibrium Selection.
MIT Press, Cambridge, 1988.



Andreu. Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green.

Microeconomic Theory.

Oxford University Press, New York, 1995.



John Nash.

Equilibrium points in n -person games.

In Proceedings of the National Academy of Sciences,
volume 36, pages 48–49, 1950.



Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.

A Course in Game Theory.

MIT Press, Cambridge, 1994.



Thomas Schelling.

The Strategy of Conflict.

Harvard University Press, Cambridge, 1960.