

期待効用 Expected Utility 測定 Measurement アブダクション Abduction と科学 Science – 合理的思考の技術 Lecture 4 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

May 2, 2011

意思決定分析と効用

復習

意思決定分析のプロトタイプ $(A, \Omega, p, u : A \times \Omega \rightarrow \mathbb{R})$ が与えられたとき、選択肢 $a \in A$ の評価値は期待効用

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

基数効用 Cardinal Utility の必要性

選択肢の評価には、 u に対して確率による重みつき足し算という演算を施している。よって、意思決定分析においては u の決め方としては、Lecture 3 で扱った序数効用では不十分。

ゲーム理論の発端となった von Neumann and Morgenstern[5] (以下 vNM と略す) を紐解き、超天才の von Neumann 大先生の説明を追いかけてみよう!

Outline

- 1 測定理論 Measurement Theory
- 2 期待効用理論 Expected Utility Theory
- 3 お金 Money の効用

測定 Measurement と直感

一般に科学理論における変数は直感の定量的感覚を「そのまま」表す必要はない。

Example (温度 Temperature)

直感で感じられるのは、せいぜいどちらの物体方がより熱いかという程度。それ以上の定量的な温度の決め方は全て物理学で基礎づけられる。

Example (基数効用と好みの強さ)

現実の意思決定主体の評価の定量的な強さの感覚(文脈によっては、これを価値観数 value function という)と vNM 効用が必ずしも一致しないことを確かめた研究もある。[1]

測定と理論

しばしば、変数のモデル化は理論や法則のみによって特徴付けられる。

Example (熱力学における絶対温度 Absolute Temperature)

- 絶対温度は、理想気体の状態方程式のような一連の物理法則が美しく単純に表現できるように **定義された**。
- 理論の発展とともに、相対温度から絶対温度へと、物理量の定義の仕方も変化したことに注意。
- 現在でも、日常の用途では、引き続き相対温度が使用される。つまり、用途に応じて、同一の物理量の定量化が異なって構わない。

Example (生物学的時間[6])

東工大の本川達雄先生は、物理学的時間と異なる変数として、「生物学的」時間を提唱している。当然、測定の仕方は通常の「時計」と全く異なる。

測定と関係・演算の保存

これまでの議論を深めた領域として測定理論 measurement theory がある。[3]

Definition (測定 measurement)

測定とは、観測される関係に対して、対応する、もしくはこれを表現 represent する、もしくはこれを **保存 preserve** する数値を割り当てること。

Example (関係・演算の保存)

- 序数効用の表現 $\forall x, y \in A [x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)]$
- 物体 a, b に対して $a \circ b$ を「併せる」という演算とすると、
 - 質量については $\text{mass}(a \circ b) = \text{mass}(a) + \text{mass}(b)$
 - Q. 体積については？

表現問題 Representation Problem

理論上の演算や関係を保存するような尺度が満たすべき **自然な条件**を探る問題を表現問題という。

- 一般に、有限個の自然な条件で、成立させたい言明を定理という形で特徴付ける作業を **公理化 axiomatization** という。
- 測定理論において示したい言明は表現定理 representation theorem。
(序数効用の表現定理を思い出そう!)

許容される変換と言明の有意味性

Definition (許容される変換 Admissible Transformation)

数値尺度の変換の前後で、関係や演算の保存が保たれるような変換。

Definition (言明 Statement の有意味性 Meaningfulness)

数値尺度を含んだ言明 statement が有意味 meaningful であるとは、言明の真偽が任意の許容される変換によって変化しないことである。

Definition (一意性問題 Uniqueness Problem)

最も一般性の高い許容される変換を特定すること。

代表的な尺度 Scale の種類

尺度のタイプ	許容される変換	例
絶対 absolute	$\phi(x) = x$ 恒等 identity 変換	個数
比率 ratio	$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$ 相似 similarity 変換	質量, 時間, 絶対温度
間隔 intervale	$\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ 正のアフィン affine 変換	基数効用 cardinal utility, 時刻, セ氏温度
順序 ordinal	単調増加変換 monotone increasing	序数効用 ordinal utility
名目 nominal	一対一対応 one to one	番号 (順不同の場合)

Outline

- 1 測定理論 Measurement Theory
- 2 期待効用理論 Expected Utility Theory
- 3 お金 Money の効用

くじ Lottery

「評価対象の集合が無限集合だったら、定量的評価に近づきそう!」という発想などから、有限の結果の集合より、以下の無限集合を作ってみる。

Definition (有限くじ Finite Lottery)

有限の結果 consequence の集合上 C で定義されるくじの空間は、

$$P = \Delta(C) = \{p : C \rightarrow \mathbb{R} \mid (\forall c \in C)p(c) \geq 0 \wedge \sum_{c \in C} p(c) = 1\}$$

すなわち、 C 上の確率分布 probability distribution の集合。

ここで導入した記号 p は、意思決定分析のプロトタイプでの p そのものではないので注意!

基数効用の求め方 Elicitation

効用の Elicitation (最小・最大があるとき)

- ① 結果のうち最も望ましいもの ($c_{\max}$) と最も望ましくないもの ($c_{\min}$) に、それぞれ選好を表現する範囲で適当に効用をふる ($u(c_{\max}) = u_{\max}$, $u(c_{\min}) = u_{\min}$)。
- ② $c \in C$ を、 $\alpha \in [0, 1]$ をいろいろ動かしながら、 $\alpha c_{\max} + (1 - \alpha)c_{\min}$ と比較。

$$c \sim \alpha c_{\max} + (1 - \alpha)c_{\min}$$

を満たす α_c を求める。

- ③ $u(c) = \alpha_c u_{\max} + (1 - \alpha_c)u_{\min}$ と定める。

1. が、いわば線形代数 linear algebra における基底 base のような役割を果たす。もし、結果の集合の評価が2状態しかなかったら、序数効用と基数効用の決め方に差異はない。

vNM効用の公理

Elicitation によって定められた効用が評価値として意味を持つ(内部整合性 internal consistency を満たす)ためには、選好に序数効用の時よりも強い条件が必要。

Definition (vNM効用の公理 Axioms)

有限くじ空間 P 上の選好 $\succsim$ について、以下の三つの公理を仮定する:

合理性 Rationality

独立性 Independence $\forall p, q, r \in P, \forall \mu \in (0, 1)$

$$p \succ q \Rightarrow \mu p + (1 - \mu)r \succ \mu q + (1 - \mu)r$$

連続性 Continuity $\forall p, q, r \in P, \exists \alpha, \beta \in (0, 1)$

$$p \succ q \succ r \Rightarrow \alpha p + (1 - \alpha)r \succ q \succ \beta p + (1 - \beta)r$$

期待効用定理

Theorem (期待効用定理 Expected Utility Theorem)

有限くじの空間 $P = \Delta(C)$ 上の二項関係 $\succsim$ が vNM 効用の公理を満たす

$\Leftrightarrow$ ある関数 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、 $\forall p, q \in P$

$$p \succsim q \Leftrightarrow \sum_{c \in C} p(c)u(c) \geq \sum_{c \in C} q(c)u(c)$$

しかも、この関数 u は、正のアフィン変換 positive affine transformation を除いて一意 unique である。

主観的期待効用[4]

- vNM 期待効用では、確率は所与とする。確率も本質的には主観的に定まるとする立場を **主観確率 subjective probability** という。
- 主観確率と基数効用を同時に決める決め方を特徴付ける理論を **主観的期待効用理論 subjective expected utility (SEU) theory** という。

Outline

- 1 測定理論 Measurement Theory
- 2 期待効用理論 Expected Utility Theory
- 3 お金 Money の効用

効用と意思決定主体の主体性

科学理論というと、自然科学においては通常は客観性を要求するだろう。意思決定分析やゲーム理論における効用は、あくまでも意思決定主体の**主観的 subjective** 評価。

効用と主体性

君にとっての効用は他者が決めるものではない！君が決める評価値だ！

世の中には、お金ののように、いかにも客観的に価値を定めたような数値が溢れているから、気をつけよう!!! こうした数値がそのまま君にとっての効用となる必要はない。

Q. 発展課題

国内総生産 GDP (Gross Domestic Products) が国の豊かさの指標として相応しいかどうか考えてみよう！

「お金」の効用[2]

金銭的報酬・損失の集合を線形順序で順序付けられた連続集合 Z とする。それを用いて、効用関数 $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ の性質を議論する。
よほどお金が嫌いでない人でない限りは、金銭的報酬が大きい方を好むだろう。このことから、次のことが言える。

Proposition

u は狭義単調増加関数 strictly increasing function である。

リスク態度

人や状況によって異なるかもしれないのは次の性質。

Definition (リスク態度 Risk Attitude)

Z 上の任意のくじ p について、その期待値の報酬 $e(p)$ を確率1でもらえることを p :

- 以上に評価する(より好む) ことをリスク回避的 risk-averse (狭義リスク回避的 strictly risk-averse)
- 以下に評価する(より嫌う) ことをリスク追求的 risk-seeking (狭義リスク追求的 strictly risk-seeking)
- と同等とみなすことをリスク中立的 risk-neutral

という。

通常のエconomicモデルや金融工学では、軒並み意思決定主体はリスク回避的であるとみなす。

Q. ギャンブルでは、人はリスク追求的に見えるが、これはどのように説明できるか？

リスク態度の性質

Proposition

金銭上の選好が

- リスク回避的 (狭義リスク回避的) iff u が凹関数 (狭義凹関数)
- リスク追求的 (狭義リスク追求的) iff u が凸関数 (狭義凸関数)
- リスク中立的 iff u がアフィン関数 ($u(z) = az + b$)

Definition (リスク回避度 Arrow-Pratt Measure of (Absolute) Risk Aversion)

$$\lambda(z) = -u''(z)/u'(z)$$

リスク回避度が一定の関数

Proposition

u のリスク回避度が一定である iff $\exists a > 0, b$

$$u(z) = \begin{cases} az + b & \text{if } \lambda(z) \equiv 0, \\ -ae^{-\lambda z} + b & \text{if } \lambda(z) \equiv \lambda > 0. \end{cases}$$

特に、 $\lambda > 0$ のとき、 u が $z \rightarrow \infty$ で b に収束することに注意。

小論文課題候補

これまでの議論をふまえ、

お金で買えないものがある。

There are some things money can't buy.

という言明について議論してみよう。

ポートフォリオ超入門

- 分散によって生じる不効用を **リスクプレミアム risk premium** という。
- 相関の少ないくじを組み合わせることによって、全体のくじのサンプル期待値の分散を抑えることができる。
cf) 大数の法則 law of large numbers、中心極限定理 central limit theorem
- **平均・分散モデル Mean-Variance Model** = もっとも単純なお金の効用関数のひとつ



Peter H. Farquhar and L. Robin Keller.

Preference intensity measurement.

Annals of Operations Research, 19:205–217, 1989.



David Kreps.

Notes On The Theory Of Choice.

Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.



Leonard J. Savage.

The Foundation of Statistics.

Dover Publishing, 2 edition, 1972.



John. von Neumann and Oscar Morgenstern.

Theory of Games and Economic Behavior.

Princeton University Press, Princeton, 3 edition, 1953.



本川達雄.

ゾウの時間ネズミの時間.

中公新書, 1992.