合理的思考の技術 Lecture 3
– 選好と効用 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

Apr 25, 2011

$1+1=2$?

- $1+1=2$ は正しい?
- もし正しいとすれば、なぜ正しい?
- いつも正しい?どういうときに正しい?

数理構造 Structure とその応用

- 同じ数学記号でも、扱う数理構造によって意味や定義されている演算が異なることがある。
- 必要最低限の数理構造を仮定すれば、一般性の高い議論ができる。

Example (順序数(序数)　Ordinal Number)

序数の集合上では、“+” などの演算は定義されない。
つまり、$1+1=2$ が意味を持たないことがある。

関係 Relation

Definition (関係)

集合 $A_1, \ldots, A_n$ 上の関係 R とは、$R \subset \times_{i=1}^{n} A_i$

Definition (二項関係 Binary Relation)

集合 A 上の二項関係とは $R \subset A^2$
　$(x, y) \in R$ のとき、xRy とも表記し、「x と y は R で関係づけられている」と読む。

二項関係の表現 representation:

- 二次元平面上のグラフ
- 有向グラフ directed graph の隣接行列 adjacency matrix

二項関係の特徴付け[1]

反射 reflexive if $\forall a \in A[aRa]$

非反射 irreflexive if $\forall a \in A[\neg(aRa)]$

対称 symmetric if $\forall a, b \in A[aRb \Rightarrow bRa]$

非対称 asymmetric if $\forall a, b \in A[\neg(aRb \wedge bRa)]$

反対称 antisymmetric if $\forall a, b \in A[(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b]$

推移 transitive if $\forall a, b, c \in A[(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc]$

完備 complete if $\forall a, b \in A[aRb \vee bRa]$

二項関係の実例

Example

A を人の集合としよう。

- a は b のことを「好きだ」というのは、一般には、「好き」は対称律を満たさない。 e.g.) 片思い
- 「友達」関係は、対称律は満たすが、推移律は満たさない。

Q. 一夫一妻制や一夫多妻制を関係として表現して、性質を調べてみよう！

二項関係の実例 I – 同値 Equivalence

Definition (同値 Equivalence)

集合 A 上の二項関係 R が同値関係である if
R が反射、対称、推移を満たす。

Example

“=” も同値関係の一種

二項関係の実例 II – 半順序 Partial Order

Definition (半順序 Partial Order)

集合 A 上の二項関係 $\geq$ が半順序関係である if
$\geq$ が反射、反対称、推移を満たす。

決定の木の説明に用いた木構造 tree structure も「先立つ」という半順序関係で特徴付けられる。

半順序の例 – 木構造 Tree Structure

Definition (Tree)

A tree is a structure $\mathcal{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{v}^0, \mathrm{T}, < >$ with

- V a set of nodes
- $\mathrm{v}^0 \in \mathrm{V}$ a unique initial node and
- $< \subset \mathrm{V}^2$ a binary relation of predecessor-successor.

Following axioms are fulfilled:

(K1) $<$ is a strict partial order.

(K2) $<$ is a strict linear order on the set $\{\mathrm{v}' \in \mathrm{V} | \mathrm{v}' < \mathrm{v}\}$ (called the path reaching node v) for every node $\mathrm{v} \in \mathrm{V} \setminus \{\mathrm{v}^0\}$.

(K3) v^0 is the smallest.
(= There exists no predecessor for the initial node.)

半順序の例 – パレート順序

Definition (パレート順序 Pareto Order[3])

$\Re^N$ 上のパレート順序 $\geq$ は以下を満たす。 $\forall x, y \in \Re^N$

$$x \geq y \Leftrightarrow (\forall i \in N)(x_i \geq y_i)$$

- $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$
- $x \gg y \Leftrightarrow (\forall i \in N)(x_i > y_i)$

と書く。
Q. パレート順序 $\geq$ が半順序関係であることを証明せよ。

Definition (パレート効率 Pareto Efficiency)

$x \in S \subset \Re^N$ が

- (弱 weakly) パレート効率的 iff not $(\exists y \in S)(y \gg x)$
- 強 strongly パレート効率的 iff not $(\exists y \in S)(y > x)$

合理的選好 Rational Preference

「a が b 以上に好ましい」という 選好関係 preference relationを
a $\succsim$ b で表す。
選好関係が(経済学用語で) 合理的 rational であるとき、弱順序 weak order の公理を満たす。

Definition (弱順序 Weak Order)

二項関係 $\succsim$ on A が弱順序である
$\Leftrightarrow$ $\succsim$ が完備性と推移律を満たす。

半順序、弱順序ともに実数 $\Re$ 上の線形順序 linear order $\geq$ の一般化。

専門用語としての合理性

- 好みが安定的 stable である
- 好みが内部整合性 internal consistency を満たす(導かれる選択が整合的である)
- 好みは意思決定主体の個性(社会正義、倫理、美　などの外的価値に一般には制約されない)
- 合理性 $\neq$ 知性　(意思決定問題が簡単であれば、簡単に解ける)

弱順序関係の成分分解

Definition (弱順序関係の成分分解)

強成分 Strict component $a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$

無差別成分 Indifference component $x \sim y \Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$

Proposition ([2])

$\succsim$が合理的ならば:

- $\succ \cup \sim = \succsim$ かつ $\succ \cap \sim = \emptyset$
- $\succ$ は非反射的、非対称的で推移的
- $\sim$ は同値関係
- $\forall x, y, z \in X : x \succ y \sim z \Rightarrow x \succ z$

選好が合理性を満たさない場合に考えられる原因:

- 区別できないほどの微少な差
- フレーミング効果 framing effect
- グループの擬人化(e.g. 法人格 corporate actor)
- 意図せざる好みの変化(e.g. 中毒 addiction)

例） 集団意思決定の合理性

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か?

Example (コンドルセのパラドックス Condorcet Paradox)

３人の投票者 $\{1,2,3\}$ がそれぞれ以下で表される選好 $\succsim_i$ $(i = 1,2,3)$ を $A = \{a,b,c\}$ 上に持つとする。

1. $a \succ_1 b \succ_1 c$
2. $b \succ_2 c \succ_2 a$
3. $c \succ_3 a \succ_3 b$

多数決によって決まる「社会的選好 social preference」を $\succsim$ とおくと

$$a \succ b \text{ かつ } b \succ c \text{ かつ } c \succ a$$

よって、 $\succsim$ は推移律を満たさない。

社会的選択理論とアロー Arrow の定理

Condorcet のパラドックスを一般化して、Arrow は(極めて自然な前提より)「合理的、パレート効率的かつ民主的 democratic な投票制度は存在しない(唯一のパレート効率的な合理的な投票制度は独裁制 dictatorship である)」ことを証明した。(ノーベル経済学賞受賞理由の一部)

興味ある人は、以下のキーワードを手がかりに自分で調べてみよう!:

- 社会的選択理論 social choice theory
- 社会厚生関数 social welfare function
- アローの定理 Arrow's theorem

序数効用 Ordinal Utility と表現 Representation

Definition (表現 Representation)

序数効用関数 $u : A \to \Re$ が選好関係 $\succsim$ on A を表現する $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in A[x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)]$$

Example

$A = \{x, y, z\}$ とする。 $x \succ y \succ z$ ならば、効用関数 $u : A \to \Re$ を $u(x) = 3, u(y) = 2, u(z) = 1$ と定めれば、u は、 $\succsim$ を表現する。

序数効用と単調変換

一つの選好関係 $\succsim$ を表現する序数効用は、一意的には定まらない。

Proposition

効用関数 u が選好関係 $\succsim$ を表現する $\Rightarrow$
任意の単調増加 monotone increasing 関数 $\sigma : \Re \to \Re$ に対して、

$$\sigma \circ \text{u} \text{は} \succsim \text{を表現する。}$$

Example (先の例の続き)

$\sigma(\text{a}) = \text{a}^2$ と定めると、$\sigma \circ \text{u}(\text{x}) = 9, \sigma \circ \text{u}(\text{y}) = 4, \sigma \circ \text{u}(\text{z}) = 1$ となり、
確かに、$\succsim$ を表現している。

このことからも分かるように、u は順序関係のみの情報を持ち、定量的な大きさは意味を持たない。また、四則演算も使えない。

表現可能性

Theorem (表現可能性)

選好関係が合理的であるときのみ、序数効用関数で表現可能である。

Proposition

選択肢集合 X が有限ならば、すべての合理的な選好関係は序数効用関数によって表現可能である。

Q. これを証明してみよう！

選択肢空間が連続の場合の表現可能性

経済学では、選択肢空間のモデル化で、しばしば連続体近似が施される。
連続な選択肢空間上では、全ての合理的な選考関係が序数効用によって表現可能というわけではない。

Proposition

すべての連続で合理的な選好関係は、連続な効用関数で表現可能である。

Example (辞書式順序)

$[0,1] \times [0,1]$ 上の辞書式順序で表される選好関係を表現する序数効用関数は存在しない。

David Kreps.
Notes On The Theory Of Choice.
Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green.
Microeconomic Theory.
Oxford University Press, New York, 1995.

H. Moulin.
Axioms of cooperative decision making.
Monograph of the Econometric Society,. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.