申告番号 0187, 3666 -「合理的思考の技術」 試験問題

担当　小林憲正

試験時間 13:20 - 14:50　の1時間半

試験開始前に以下の注意を**無視せず**によく読むこと！！！！

- 問題冊子は試験開始まで閉じておくこと。
- 回答用紙は、A4 の白紙を3枚配布する。配布された**すべての**回答用紙の右上に**試験開始前**に氏名と学籍番号を明記すること。
- 全部で5つの大問の中から**4問以内**選択して回答せよ。（5問回答した人は0点）
  デフォルト・コース、試験のみコースによらず、大問3つを完璧に回答すると満点。（4問目にチャレンジして、素点が満点以上の人はすべて満点と換算する。）
- 回答用紙左上に回答する大問の番号を()つきで明記せよ。
  回答用紙1枚に大問2つ以上回答しないこと。
  回答用紙は裏も使用すること。スペースが足りない人や、大問を4つ回答する人は挙手すること。追加の回答用紙を配布する。
  1つの大問に回答用紙を2枚以上使う人は、2枚目以降大問番号と続きであることを明記すること。
  回答欄がフリースペースなので、後に追記したくなることを考慮し、各小問の暫定的答案と次の小問との間にスペースを空けておくことを勧める。
- 説明が中心の小問は簡潔な回答でオーケー。
  数式や図の扱いが必要とされる問題は、特に注意書きがない限り、最終的な解やグラフの概形のみならず、導出過程も簡単に記せ。
- 常識の範囲内であれば、数式の中で説明抜きで略称を使ってオーケー。（例：　大岡山 → 大）
- 本試験は持ち込み可。回答にあたってなにを参照するのも自由。電子機器の使用も可。ただし、音は出ない設定にしておくこと。試験時間内に検索ができて、適切に回答できる能力も能力のうち。
- 大問一つ（現実の一つの意思決定問題に相当）は概ね講義の一つのテーマを中心に出題されているが、一般に複数のテーマにまたがってもいる。
  現実世界でいつどういう問題に直面するかが分からないのに対応して、大問の出題順序は順不同。
- 時間はかなりタイト。分からないところで悩みすぎずに、要領よく時間配分すること。
  各大問の後半が難しくてどうしても解きにくい場合を除いて、まずは大問3つの完答を目指すこと。一般に、後半の問に大きな採点のウエイトがおかれる。
  もちろん、時間が余れば、4問目にもチャレンジして満点を目指すのも大歓迎！
- 日本語表現など分かりにくいところがあれば、気軽に挙手して質問すること。

1

以下のような待ち合わせをモデル化したゲームを考える。

$1 \setminus 2$	大岡山	自由が丘
大岡山	4, 3	0, 0
自由が丘	0, 0	3, 4

について考える。利得双行列が対称でないのは、大岡山、自由が丘がそれぞれプレーヤー1, 2にとって相対的に都合が良いことを表している。

上記のゲームに関連して、以下の問いに答えよ。

1. ナッシュ均衡を全て記せ。(今回の講義では扱っていない混合戦略のナッシュ均衡は求めなくて良い)

2. プレーヤー 1 はプレーヤー 2 がどちらに来るか分からないとする。2 が大岡山に来る確率を $p_2 \in [0, 1]$ とおく(自由が丘に来る確率は $1 - p_2$ となる)。このとき、期待効用最大化によりプレーヤー 1 の行く場所を選択し、その時に得られる期待効用を求めよ。(ヒント - p_2 の値によって、最適解が異なるので、場合分けせよ)

   同様に、プレーヤー 2 もプレーヤー 1 がどちらに来るか分からないとする。1が大岡山に来る確率を $p_1 \in [0, 1]$ とおく(自由が丘に来る確率は $1 - p_1$ となる)。プレーヤー 2 の行く場所も期待効用最大化により求めよ。プレーヤー 2 のほうは、導出過程は省略して答えだけ記しても良い。

3. 事前にデートの場所の約束ができたとする。約束がチープトークである場合、拘束力のある約束の必要条件を一つ述べ、本問のゲームにおける有効な約束の候補を示せ。

4. 約束のご利益の一つに、その情報の価値がある。前問で得られた約束が持つ情報の価値 EVPI を、小問2の結果を比較静学分析的に用いて議論せよ。

5. 同じゲームをプレーする場合でも、状況に応じて約束が必要であったりなかったりする。約束の必要のないような阿吽の呼吸が可能な状況(お互いに言わなくても分かる状況)を、本問のゲームに即して具体例をあげて説明せよ。
   前小問で比較静学分析を行った人は、この結果を直接引用して説明するのも、なお良い。

6. 本問のゲームを繰り返しプレーすることを考える。フォーク定理を用いて、良さそうな待ち合わせの仕方を一つ説明せよ。

2

二つの属性を持つ多属性意思決定問題を考える。ただし、それぞれの属性 $l = 1, 2$ は数値 $v_l \in \Re$ で評価され、数値が大きいほど望ましいとする。$v = (v_1, v_2) \in \Re^2$ と書く。

以下の問に答えよ。(数学的記号の操作が得意でない人は、数式の代わりに図を駆使して解くこともオーケー。)

1. パレート順序 Pareto order の定義を記せ。パレート順序を表す記号として、$\succsim$ を用いよ。
2. パレート順序が半順序関係 partial order であることを証明せよ。
3. パレート順序が完備 complete でないことを、反例を挙げることにより示せ。
4. パレート順序で比較不可能なペアを無差別 indifferent として、パレート順序を完備化するという方策が直感的に思い浮かぶが、この方策には問題がありそうだ。反例とともに、問題となる点を議論せよ。
5. パレート順序は完備でないため、効用関数で表現 represent することは不可能である。実際、パレート順序だけでは、効率的な解が無数に存在するため、通常は、より具体的に効用関数を設定して、多属性意思決定を行う。
   そこで、パレート順序と矛盾しない、すなわち
   $$\forall a, b \in \Re^2 [a \succsim b \Rightarrow u(a) \geq u(b)]$$
   を満たす効用関数 $u : \Re^2 \to \Re$ の実例をひとつ挙げよ。表現の場合と異なり、$\Leftrightarrow$ でないことに注意。
6. Kalai (1977) の交渉解で、特に、交渉解の方向ベクトルが $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$である場合を考える。この交渉解を合理化 rationalize する効用関数の候補を一つ求めよ。
   (前問が正解できていなくても回答可能)

3

以下の状態依存効用 $u(\omega, x)$ で表されるアウトドア派の人の休日の過ごし方について考えてみる。

$x \backslash \omega$	晴れ	曇り	雨
ピクニック	5	2	−5
ショッピング	2	3	−1
家にいる	1	1	1

この意思決定環境に関連して、以下の問いに答えよ。

1. 天気予報が雨に関する情報のみ100%の精度で与えているとする。晴れと曇りについては、「晴れ時々曇り」のように、確定的な情報が与えられていないとする。天気の集合 $\Omega = \{晴, 曇, 雨\}$ 上に、対応する粗い情報分割（ラベル）を導入せよ。

2. 「雨でない」ことがわかった時点で、どのような戦略的意思決定が可能か？選択肢集合 $X = \{$ピクニック, ショッピング, 家にいる$\}$ 上に戦略的意思決定を特徴付ける情報分割のラベルを導入せよ。

3. 前小問で導入したラベルに対応させて、順序準同型で簡略化した効用関数を適当に一つ定義せよ。

4. 本問の意思決定環境が、休日ではなくて平日の通勤の意思決定だとする。すると、普通に毎日通勤する人にとっては、天気を知ることに情報の価値はない。なぜか？状態依存効用関数の表を作り直して説明せよ。
   では、なぜ通勤する人も天気予報を見るのだろう？説明せよ。
   （本小問が解けなくても、以下の小問の回答には支障はありません）

5. 話を休日の過ごし方に戻す。

   表の効用を持つ主体にとっては、「雨が降ったら、家にいる」という休日の過ごし方のヒューリスティックスは合理的に見える。しかし、とりわけ、ゲーム状況においては、このようなヒューリスティックスに頼る思考法だと一般にはパレート効率的な結果を達成しにくいことを学んだ。

   そこで、本問の問題状況を二人意思決定状況へと少し修正してみよう。この意思決定主体に、全く同様の効用を持つパートナーができたとする。両親にまだ紹介していないなどの事情で、自宅で一緒にいることは無理とする。他方、一緒に時間を過ごすことができると、一人の時に比べて効用が3増加するとする。雨が降っているときの意思決定状況を二人同時決定ゲームで定式化し、「雨が降ったら、家にいる」というヒューリスティックスがそのままナッシュ均衡となっていることを確認せよ。

   次に、他のナッシュ均衡を探し、「雨が降ったら、家にいる」をパレート支配していることを確かめよ。

4

二人のプレーヤー 1, 2 によるケーキの分配を考える。プレーヤー $i(=1,2)$ が受け取るケーキの配分の割合を $x_i \in [0,1]$ 、配分 x_i から受ける効用を $u_i(x) = \alpha_i \sqrt{x_i}$ とする。ただし、$\alpha_i > 0$ は、プレーヤー i のケーキの好みを表す係数。

以下の問いに答えよ。

1. ケーキ分配による効用可能集合 UPS を解析的に求め、u_1, u_2 空間上に描け。(数学が苦手な人は、効用可能集合の形についての簡単な説明だけで、概形を描けば良しとする)

2. 事前交渉による合意の拘束力がない分配ゲームとして最後通牒ゲーム (ultimatum game) を講義で扱った。ここでは、最後通牒ゲームを同時決定にする。問題設定が少し変化すると分配が劇的に変化する様を堪能してもらいたい。

   今回考える二人 ($i = 1, 2$) 同時決定ゲームは以下のとおり:

   ・まず、各プレーヤー i はそれぞれ自分の取り分の割合 $x_i \in [0,1]$ を同時に主張する。(この主張が、それぞれのプレーヤーの戦略である)

   ・$x_1 + x_2 \leq 1$ のとき、お互いの提案が併せて実行可能であり、x_i がそれぞれのプレーヤー i に配分される。
   $x_1 + x_2 > 1$ のときは、交渉決裂とみなされ、プレーヤー 1, 2 ともに配分は 0 となる。

   上記のゲームのナッシュ均衡を全て求めよ。(ナッシュ均衡がそれ以外にないことの証明は不要)

3. Kalai (1977) の交渉解を図解により求めよ。

4. Kalai (1977) の解について、特に、好みについての比較静学分析を行ないたい。プレーヤー2の好みを固定して、プレーヤー1の好みだけ動かしたとき、交渉解における配分 (x_1, x_2) はどのように動くか？数学的に厳密な証明というよりは、定性的な説明を試みよ。

5. 前小問の分析を踏まえて、Kalai (1977) の解の特徴を批判的に検討せよ。

5

講義では、ムカデゲームを実例として、プレーヤー全員が合理的であることが必ずしも良い結果をもたらさないことを説明した。本問では、この効果を有限回繰り返し囚人のジレンマゲームの分析によってみてみる。

次のステージゲームの T 回繰り返しゲームを考える。

$1 \setminus 2$	C	D
C	3, 3	1, 4
D	4, 1	2, 2

ただし、割引因子は考慮せず、T 回プレーした時に得られるプレーヤー i の累積効用は、$t = 1, ..., T$ 期に得られるステージゲームの効用 $u_i^t(x^t)$ より、

$$\sum_{t=1}^{T} u_i^t(x^t)$$

で与えられる。

上記のゲームに関連して、以下の問いに答えよ。

1. ステージゲームのナッシュ均衡を求めよ。

2. T 回繰り返しゲームの唯一の後ろ向き帰納法の解を求めよ。説明は簡単でよろしい。

3. プレーヤー 1、2 がともに後ろ向き帰納法の解を計算するような合理的なプレーヤーではなく、以下で述べるいわゆる「目には目を歯には歯を（しっぺ返し）」戦略をとるタイプであるとする：

   - 最初は協力をプレーする。
   - 相手が過去に協力し続けている間はずっと協力し、相手が裏切った場合は次の期に裏切り返す。以降、同様にして、相手の戦略の変化に対応する。

   このようなプレーヤーたちによるプレーの結果を説明せよ。

4. プレーは、プレーヤー本人の合理性のみならず、そのプレーヤーが「相手の合理性についてどう考えているか」にも大きく影響される。

   プレーヤー1，2がともに合理的とする。しかし、プレーヤー1，2ともに、相手が「目には目を歯には歯を」戦略をとるプレーヤーであると信じているとする。この場合のプレーの結果を説明せよ。

5. 現実に有限回繰り返し囚人のジレンマゲームをプレーする場合には、相手のタイプは必ずしもよくわからない。この場合、あなたならどうプレーするか？前小問までの分析を踏まえて説明せよ。