位相と凸解析
関数の連続性と Bolzano-Weierstrass の定理

平井　俊行

7　関数の連続性と Bolzano-Weierstrass の定理

定義 27 $X \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}^{\ell}$ が $x \in X$ において連続であるとは、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ であるような X における任意の収束点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x)$ となることである．

　また、$f : X \to \mathbb{R}^{\ell}$ が任意の $x \in X$ において連続であるとき、f は X 上で連続、または単に f は連続であるという．

命題 17 $X \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}^{\ell}$ が $x \in X$ において連続であることの必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、$||x - x'|| < \delta$ であるような任意の $x' \in X$ について $||f(x) - f(x')|| < \varepsilon$ となることである．

問題 6 命題 17 を証明しなさい．

命題 18 $X \subset \mathbb{R}^{\ell}$ とする．$X \times X$ 上で定義されたユークリッド距離関数は連続である．

注意 9 関数が各座標について (他の座標を固定することで) 個別に連続であっても同時に変化させた時に連続であるとは限らない．

命題 19 $X \subset \mathbb{R}^{\ell_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{\ell_2}$, $Z \subset \mathbb{R}^{\ell_3}$ とする．$f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ がそれぞれ連続な関数だったとする．このとき、$h = g \circ f : X \to Z$ も連続な関数となる．

定義 28 $X \subset \mathbb{R}^{\ell}$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $x \in X$ において上半連続であるとは、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ であるような X における任意の収束点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f(x^n) \le f(x)$ となることである．

　また、$f : X \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in X$ において上半連続であるとき、f は X 上で上半連続、または単に f は上半連続であるという．

命題 20 $X \subset \mathbb{R}^{\ell}$ とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．また、$x \in X$ とする．このとき、次の 3 命題 1-3 は同値である．

1. f は上半連続である．

2. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について、$\{x' \in X |\ f(x') \ge \lambda\}$ は X における閉集合である．

3. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\{x' \in X |\ f(x') < \lambda\}$ は X における開集合である．

定義 29 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $x \in X$ において下半連続であるとは、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ であるような X における任意の収束点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f(x^n) \geq f(x)$ となることである．

また、$f : X \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in X$ において下半連続であるとき、f は X 上で下半連続、または単に f は下半連続であるという．

命題 21 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．また、$x \in X$ とする．このとき、次の 3 命題 1-3 は同値である．

1. f は下半連続である．

2. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について、$\{x' \in X|\ f(x') \leq \lambda\}$ は X における閉集合である．

3. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\{x' \in X|\ f(x') > \lambda\}$ は X における開集合である．

補題 4 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．このとき f が上半連続であることの必要十分条件は $-f$ が下半連続であることである．

命題 22 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．f が連続である必要十分条件は、f が上半連続かつ下半連続であることである．

定理 1 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を非空なコンパクト集合とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．

(1) f が X 上で上半連続であれば、任意の $x \in X$ について $f(x^*) \geq f(x)$ となる $x^* \in X$ が存在する．

(2) f が X 上で下半連続であれば、任意の $x \in X$ について $f(x^*) \leq f(x)$ となる $x^* \in X$ が存在する．

系 3 (Bolzano=Weierstrass の定理) $X \subset \mathbb{R}^\ell$ をコンパクト集合とし、$f : X \to \mathbb{R}$ を X 上で連続な関数とする．このとき、任意の $x \in X$ に対して、$f(x^*) \geq f(x)$ となるような $x^* \in X$ および $f(x_*) \leq f(x)$ となるような $x_* \in X$ が存在する．

命題 23 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$f : X \to \mathbb{R}^\ell$ を連続関数とする．このとき、$X' \subset X$ であるような任意のコンパクト集合 X' について $f(X') = \{y \in \mathbb{R}^\ell|\ \exists x \in X', f(x) = y\}$ がコンパクト集合となる．

問題 7 命題 23 を証明しなさい．

命題 24 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ をコンパクト集合とする．$f : X \to \mathbb{R}$ を X 上で連続な関数とする．このとき、

$$\begin{aligned} X^* &= \{x \in X|\ f(x) \geq f(x'), \forall x' \in X\} \\ X_* &= \{x \in X|\ f(x) \leq f(x'), \forall x' \in X\} \end{aligned}$$

はコンパクト集合となる．