位相と凸解析
点列と収束

平井　俊行

4　点列と収束

4.1　収束点列

定義 10 X を集合とする．関数 $x : \mathbb{N} \to X$ を X における点列と呼ぶ.

注意 3 実際は、上の定義の関数 x によって定義された点の列、すなわち $(x(1), x(2), ..., x(n), ...)$ のことを点列と呼ぶことも多い．本講義では、これら 2 つのことは同一のものとみなし、その場その場で便利な方を用いることにする．また、表記を簡略化して $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (x^1, x^2, ..., x^n, ...)$ などとあらわすことにする.

定義 11 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする．$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x \in \mathbb{R}^\ell$ に収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $n^0 \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $n' \geq n^0$ について $||x^{n'} - x|| < \varepsilon$ となることである．また、このとき、x を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限と呼び、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ と表す.

命題 2 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする．$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束点列であるならば、その極限はただ 1 つに定まる.

問題 3 命題 2 を証明しなさい.

命題 3 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする．$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束点列であることの必要十分条件は、任意の $i = 1, ..., \ell$ について、点列 $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束点列であることである.

定義 12 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

- 任意の $M \in \mathbb{R}$ について、ある $\bar{n} \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n' \geq \bar{n}$ についても $x^{n'} > M$ となるとき、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は正の無限大に発散するという．また、正の無限大に発散する点列の極限を ∞ とあらわす.

- 任意の $M \in \mathbb{R}$ について、ある $\bar{n} \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n' \geq \bar{n}$ についても $x^{n'} < M$ となるとき、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は負の無限大に発散するという．また、負の無限大に発散する点列の極限を $-\infty$ とあらわす.

4.2 点列の有界性

定義 13 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

- ある $x^* \in \mathbb{R}^\ell$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $x^* \geq x^n$ となるとき、x^* を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界と呼ぶ.
- ある $x_* \in \mathbb{R}^\ell$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $x^n \geq x_*$ となるとき、x_* を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下界と呼ぶ.

定義 14 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

- x^{**} が $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界で、かつ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ のすべての上界 y に対して $y \geq x^{**}$ となるとき、x^{**} を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上限と呼び、$\sup_{n\in\mathbb{N}} x^n$ とあらわす..
- $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上界を持つ時、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上に有界であるという.
- x_{**} が $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下界で、かつ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ のすべての下界 y に対して $x_{**} \geq y$ となるとき、x_{**} を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下限と呼び、$\inf_{n\in\mathbb{N}} x^n$ とあらわす..
- $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下界を持つ時、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界であるという.
- $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界かつ下に有界のとき、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるという.

注意 4 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ における点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．それぞれの $n \in \mathbb{N}$ について、$y^n = ||x^n||$ と定義する．このとき、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとは、$(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有界となることである.

また、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるための必要十分条件は $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界および下界が存在することである.

定義 15 (実数の連続性) $A, B \subset \mathbb{R}$ が、

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = \mathbb{R}$
3. $A \cap B = \emptyset$
4. 任意の $a \in A$ および $b \in B$ について $b < a$

を満たす集合であるとする．このとき、任意の $a \in A$ および $b \in B$ について $b \leq c \leq a$ が成立する $c \in \mathbb{R}$ が存在する.

命題 4 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

- $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界ならば、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上限が存在する.

- $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界ならば、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下限が存在する.

$X \subset \mathbb{R}$ における点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界でないとき、便宜的に $\sup_{n\in\mathbb{N}} x^n = \infty$ とあらわす. 同様に、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界でないとき、便宜的に $\inf_{n\in\mathbb{N}} x^n = -\infty$ とあらわす.

例 1 点列は必ず収束するとは限らない. たとえば、
$(1, -1, 1, -1, ..., 1, -1)$ や $(1, -2, 3, -4, ..., 2n-1, -2n, ...)$ などを考えれば明らかであろう. また、これらの点列は $X \subset \mathbb{R}$ における点列であるが、どちらの点列も正の無限大にも負の無限大にも発散しない. さらに 1 つ目の点列は有界であるが、2 つ目の点列は上にも下にも有界でないことは明らかであろう.

命題 5 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

- もし、任意の $k \in \mathbb{N}$ について、$x^k \leq x^{k+1}$ で、かつ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界であるならば、$\lim_{n\to\infty} x^n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x^n$ となる.
- もし、任意の $k \in \mathbb{N}$ について $x^k \geq x^{k+1}$ で、かつ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界ならば、$\lim_{n\to\infty} x^n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x^n$ となる.

4.3 上極限・下極限

定義 16 X を集合とし、$x : \mathbb{N} \to X$ を X における点列とする. このとき、$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を単調増加関数とすると、$x \circ \xi : \mathbb{N} \to X$ を x の部分列と呼ぶ.

注意 5 点列と同様に、上の定義の関数 $x \circ \xi$ によって定義された点の列、すなわち
$(x(\xi(1)), x(\xi(2)), ..., x(\xi(k)), ...)$ を x の部分列と呼ぶことも多い. こちらでもその場その場で便利なほうを用いることにする. また、簡略表記として、$(x^{\xi(k)})$ などとあらわす.

命題 6 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ について、$x^{\xi^k(n)} = (x^k, x^{k+1}, ...)$ と定義する.
(1) このとき、以下の 2 つのうちどちらか一方のみが必ず成立する.

- すべての $k \in \mathbb{N}$ について、$\sup_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) = \infty$
- すべての $k \in \mathbb{N}$ について、$\sup_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) < \infty$ かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^{k+1}(n)})$.

(2) また、以下の 2 つのうちどちらか一方のみが必ず成立する.

- すべての $k \in \mathbb{N}$ について、$\inf_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) = -\infty$
- すべての $k \in \mathbb{N}$ について、$\inf_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) > -\infty$ かつ $\inf_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^k(n)}) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}(x^{\xi^{k+1}(n)})$.

定義 17 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする．任意の $k \in \mathbb{N}$ について、$x^{\xi^k(n)} = (x^k, x^{k+1}, ...)$ と定義し、$\alpha^k = \sup_{n\in\mathbb{N}} x^{\xi^k(n)}$ および $\beta^k = \inf_{n\in\mathbb{N}} x^{\xi^k(n)}$ と定義する．このとき、

- 点列 $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の上極限と呼び、$\limsup_{n\to\infty} x^n$ とあらわす.
- 点列 $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下極限と呼び、$\liminf_{n\to\infty} x^n$ とあらわす.

注意 6 もし、任意の $k \in \mathbb{N}$ について、$\sup_{n\in\mathbb{N}} x^{\xi^k(n)} = \infty$ が成立している場合、$\limsup_{n\in\mathbb{N}} x^n = \infty$ と定義する．同様に、もし、任意の $k \in \mathbb{N}$ について、$\inf_{n\in\mathbb{N}} x^{\xi^k(n)} = -\infty$ が成立している場合、$\liminf_{n\in\mathbb{N}} x^n = -\infty$ と定義する.

注意 7 命題 5，6 および注意 6 より、上極限および下極限は必ず定義できる.

命題 7 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

(1) $\limsup_{n\to\infty} x^n \geq \liminf_{n\to\infty} x^n$

(2) $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するための必要十分条件は $\limsup_{n\to\infty} x^n = \liminf_{n\to\infty} x^n$ となることである.

系 1 $X \subset \mathbb{R}$ とし、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における点列とする.

(1) $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束点列であるならば、

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \limsup_{n\to\infty} x^n = \liminf_{n\to\infty} x^n$$

となる.

(2) $\limsup_{n\to\infty} x^n = \liminf_{n\to\infty} x^n = x^*$ であるならば、$\lim_{n\to\infty} x^n = x^*$ となる.

問題 4 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x^n > y^n$ であるような $X \subset \mathbb{R}$ における収束点列とする.

(1) $\lim_{n\to\infty} x^n \geq \lim_{n\to\infty} y^n$ となることを示しなさい.

(2) $\lim_{n\to\infty} x^n > \lim_{n\to\infty} y^n$ とは必ずしもならないことを、反例を用いて示しなさい.

命題 8 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X における収束点列とし、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ とする．このとき、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(x^{\xi(n)})_{n\to\infty}$ について $\lim_{n\to\infty} x^{\xi(n)} = x$ となる.