位相と凸解析
第 1 回　集合と関数

平井　俊行

1　集合

1.1　集合と代表的な例

集合 ··· それを満たしているか否かがはっきりと判定できるある性質を満たす「もの」の集まり.

集合 X に x が属しているとき、x を X の要素または元と呼び、$x \in X$ であらわす. また、x が集合 X の要素でないとき、$x \notin X$ であらわす.

代表例

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{R}_+$: 0 以上の実数全体の集合
- $\mathbb{R}_{++}$: 正の実数全体の集合
- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\emptyset$: 空集合（要素を 1 つも含まない集合）
- $[a, b]$ $(a \leq b)$: a と b の閉区間（a 以上、b 以下の実数全体の集合）
- $]a, b[$ $(a < b)$: a と b の開区間（a より大きく、b 未満の実数全体の集合）

定義 1 集合 A が集合 B の要素をすべて含むとき、B を A の部分集合と呼び、$B \subset A$ であらわす.

一般的な集合の記述の仕方.

- 要素を全部並べる
  - $\{a, b, c, ..., x, y, z\}$: アルファベットすべての集合.
  - $\{1, ..., n\}$: 1 から n(自然数）までのすべての自然数の集合.
- その集合の要素が満たす条件を書く.
  - $\{x \in \mathbb{N} |\ (x/3) \in \mathbb{N}\}$: 3 の倍数の集合

1.2 集合の演算

以下、A,B を集合とする.

1. $A \cup B = \{x|\ x \in A$ もしくは $x \in B\}$: A と B の合併
2. $A \cap B = \{x|\ x \in A$ かつ $x \in B\}$: A と B の共通部分
3. $A + B = \{x|\ x = a + b$ となる $a \in A$ と $b \in B$ が存在する $\}$: A と B の直和
4. $A \times B = \{(x, y)|x \in A$ かつ $y \in B\}$: A と B の直積
5. $A \setminus B = \{x|\ x \in A$ かつ $x \notin B\}$: A と B の差集合
6. $A \subset B$ のとき、$A^c = B \setminus A$: A の B における補集合

注意 1 *5,6* を除き、これらの演算は順番に依存しない. *(*たとえば、$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$*)* したがって、複数回同じ演算を行う場合、一度に記述してよい.（上の例なら $A \cup B \cup C$*)* ただし、*4* は並び方には依存することに注意すること.

また、A を集合とし、それぞれの $a \in A$ に対し、集合 X_a が定義されていたとする. そのすべての集合の合併、共通部分、直積はそれぞれ次のようにあらわされる.

- $\bigcup_{a \in A} X_a$*:* 合併
- $\bigcap_{a \in A} X_a$*:* 共通部分
- $\times_{a \in A} X_a$*:* 直積

すると、任意の自然数 ℓ について、ℓ 次元ベクトルの集合は、$\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^\ell$ であらわされる.

命題 1 (De Morgan の法則) A を集合とし、任意の $a \in A$ について、X_a がある集合 X の部分集合となっていたとする. $(X_a)^c = X \setminus X_a$ が定義できていたとする. このとき、以下の性質が成り立つ.

$$\left(\bigcup_{a \in A} X_a\right)^c = \bigcap_{a \in A} (X_a)^c, \qquad \left(\bigcap_{a \in A} X_a\right)^c = \bigcup_{a \in A} (X_a)^c$$

問題 1 命題 *1* を証明しなさい.

2　関数

定義 2 X,Y をそれぞれ集合とし、X のそれぞれの要素に対して、Y の *1* つの要素を対応させる規則 f を関数と呼び、$f : X \to Y$ などとあらわす．また、$x \in X$ に対応するのが $y \in Y$ のとき、$f(x) = y$ とあらわす．このとき X を f の定義域、Y を f の値域と呼ぶ.

定義 3 X, Y を集合とし $f : X \to Y$ とする.

- 任意の $A \subset X$ について、$f(A) = \{y \in Y|\ f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する $\}$ を f による A の像と呼ぶ.
- 任意の $B \subset Y$ について、$f^{-1}(B) = \{x \in X|\ f(x) = y$ となる $y \in B$ が存在する $\}$ を f による B の逆像と呼ぶ.
- 任意の $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在するとき、f を全射もしくは Y の上への関数と呼ぶ.
- 任意の $x, x' \in X$、ただし $x \neq x'$ について、$f(x) \neq f(x')$ となるとき、f を単射もしくは一対一関数と呼ぶ.
- f が全射かつ単射であるとき、f を全単射と呼ぶ.

注意 2 X, Y を集合とし、$f : X \to Y$ が全単射であるとする．任意の $y \in Y$ に対して、$f(x)$ となる $x \in X$ が唯一つだけ存在する．したがって、それぞれの $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となるような $x \in X$ を対応させる関数 f^{-1} が定義できる．この $f^{-1} : Y \to X$ を f の逆関数と呼ぶ.

定義 4 X, Y, Z をそれぞれ集合とし、$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ関数とする．このとき、$h(x) = g(f(x))$ となるような関数 $h : X \to Z$ を f と g の合成関数と呼び、$h = g \circ f$ とあらわす.