２人協力ゲーム（交渉ゲーム）

1. **２人戦略形ゲーム**

$$(N = \{1, 2\}, (S_1 = \{s_1, ..., s_m\}, S_2 = \{t_1, ..., t_n\}), (g_1, g_2))$$
$$g_1(s_i, t_j) = a_{ij}, g_2(s_i, t_j) = b_{ij}$$

(a) 相関（混合）戦略
$r = (r_{11}, ..., r_{mn}),\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = 1,\ r_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$
r_{ij}：戦略の組 (s_i, t_j) をとる確率

(b) 期待利得
$u_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_{ij},\ u_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} r_{ij}$

(c) 実現可能集合
$R = \{u = (u_1, u_2) | u_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_{ij},\ u_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} r_{ij}\}$

(d) 交渉の基準点
$u^0 = (u_1^0, u_2^0)$
マックスミニ値，ミニマックス値，ナッシュ均衡

2. **交渉問題** (R, u^0)

(a) R は $\Re^2$（２次元ユークリッド空間）におけるコンパクト（有界かつ閉）で凸な集合

(b) $u^0 \in R$

(c) $u_1 > u_1^0, u_2 > u_2^0$ となる $u = (u_1, u_2)$ が存在する．

交渉問題の全体を $\mathcal{B}$ で表す．

- R が凸　$\Leftrightarrow$　任意の $u, v \in R$ と任意の $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して $\alpha u + (1 - \alpha) v \in R$
- R が有界　$\Leftrightarrow$　ある $M \in \Re_+$ が存在して，すべての $u = (u_1, u_2) \in R$ に対して $-M \leq u_1, u_2 \leq M$
- R が閉　$\Leftrightarrow$　$u^n \to u$ となる点列　$u^1, u^2, ... \in R$ に対して，$u \in R$

3. **ナッシュ交渉解**

次の４つの性質を満たす関数 $f : \mathcal{B} \to \Re^2$

(a) パレート最適性
各 $(R, u^0) \in B$ について，
$f(R, u^0) = (f(R, u^0)_1, f(R, u^0)_2)$ は R においてパレート最適でなければならない．

（パレート最適性の定義）
$u = (u_1, u_2)$ が R においてパレート最適 $\Leftrightarrow$
もし $u_1' \geq u_1, u_2' \geq u_2, u' \in R$ であれば，$u' = u$

(b) 対称性

(R, u^0) が対称であれば，$f(R, u^0)_1 = f(R, u^0)_2$

（対称性の定義）

(R, u^0) が対称　$\Leftrightarrow$

$(1)(u_1, u_2) \in R$ ならば $(u_2, u_1) \in R$

$(2)u_1^0 = u_2^0$

(c) 利得の正アフィン変換からの独立性

(R, u^0) に対して，交渉問題 (R', u'^0) を次のように定義する．

$R' = \{u' = (u_1', u_2')|u_1' = \alpha_1 u_1 + \beta_1, u_2' = \alpha_2 u_2 + \beta_2, u = (u_1, u_2) \in R\}$

$u_1'^0 = \alpha_1 u_1^0 + \beta_1,$

$u_2'^0 = \alpha_2 u_2^0 + \beta_2$

$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1, \beta_2$ は定数.

このとき，

$f(R', u'^0)_1 = \alpha_1 f(R, u^0)_1 + \beta_1,$

$f(R', u'^0)_2 = \alpha_2 f(R, u^0)_2 + \beta_2$

(d) 無関係な結果からの独立性

(R, u^0) に対して，$f(R, u^0) \in T, u^0 \in T$ となる $T \subseteq R$ が存在するならば，

$f(T, u^0) = f(R, u^0)$

4. **ナッシュ交渉解の存在定理**

上の４つの性質を満たす関数 $f : \mathcal{B} \to \Re^2$ はただ一つに定まり，各交渉問題 (R, u^0) に対して，

$$max\{(u_1 - u_1^0)(u_2 - u_2^0)|(u_1, u_2) \in R, u_1 \geq u_1^0, u_2 \geq u_2^0\}$$

の最大値を実現する (u_1, u_2) を与える．(u_1, u_2) はただ一つに定まる．

このような f をナッシュ交渉解という.

5. **ナッシュ交渉解に対する非協力ゲームからのアプローチ**

「ゲーム理論入門」68 ページ練習問題２を用いて説明する。

問題「２人のプレイヤー１，２が共同事業で得た１００万円をどのように分配するかを協議している。合計が１００万円以下になるようなわけ方も可能である。話し合いが決着しなければ，２人とも何も得られない。」

(a) 交渉ゲームとしての定式化

実現可能集合 $R = \{(u_1, u_2) \in \Re^2|u_1 + u_2 \leq 100,\ 0 \leq u_1, u_2\}$

交渉の基準点 $u^0 = (u_1^0, u_2^0) = (0, 0)$ したがって，パレート最適性と対称性から，ナッシュ交渉解は $u^* = (u_1^*, u_2^*) = (50, 50)$ である。

(b) Nash の非協力ゲームからのアプローチ

２人のプレイヤー１，２が，それぞれ自分の要求額 $u_1, u_2 \geq 0$ を同時に提示する。もし，$u_1 + u_2 \leq 100$ であれば，それぞれ自分の要求額を得る。もし，$u_1 + u_2 > 100$ であれば，両者はいずれも交渉の基準点の額 0 を得る。

このゲームにおいて，ナッシュ交渉解 $(50, 50)$ も１つのナッシュ均衡になるが，それ以外に多数のナッシュ均衡が存在する。(「ゲーム理論入門」235 ページの解答参照)

(c) Rubinstein のアプローチ

１期目:一方のプレイヤー（以下ではプレイヤー１とする）が自分と相手の取り分 (u_1^1, u_2^1) を提示する。プレイヤー２は，これを受け入れるか拒否するかを決める。受け入れた場合には，プレイヤー１は u_1^1，プレイヤー２は u_2^1 を得て，ゲームは終了する。拒否した場合には，２期目に入る。

２期目：プレイヤー２が自分と相手の取り分 (u_1^2, u_2^2) を提示する。プレイヤー１は，これを受け入れるか拒否するかを決める。受け入れた場合には，プレイヤー１は u_1^2，プレイヤー２は u_2^2 を得て，ゲームは終了する。拒否した場合には，３期目に入る。

３期目：　プレイヤー１が自分と相手の取り分 (u_1^3, u_2^3) を提示し，プレイヤー２は，これを受け入れるか拒否するかを決める。

以下このようにして，提示されたプレイヤーが受け入れるまで続ける。

無限に続く場合の両者の利得はともに 0 としておく。時間の経過を考慮に入れるために，割引因子 $\delta,\ 0 < \delta < 1$ を導入し，各期の利得の１期目における価値を考える。２期目の利得は $(\delta u_1^2, \delta u_2^2)$，３期目の利得は $(\delta^2 u_1^3, \delta^2 u_2^3)$ である。

このゲームの部分ゲーム完全均衡点は，$\delta \to 1$ であるとき，ナッシュ交渉解 $(50, 50)$ に収束する。