数理計画法E(第6学期)
第13回

担当:飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

非線形計画問題（1）

- 線形計画問題
  - 実数ベクトル空間において、線形関数からなる制約条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 組み合わせ最適問題
  - 有限個の中から解を選択する条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 非線形計画問題
  - 実数ベクトル空間において目的関数を最大化、あるいは、最小化する問題

非線形計画問題(2)

- 一般の定式化

$$\text{目的関数：}\quad f(\boldsymbol{x}) \to \text{最小化}$$

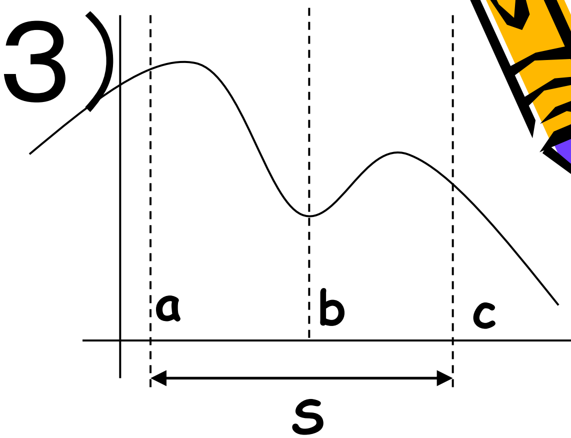
$$\text{制約条件：}\quad \boldsymbol{x} \in S$$

  - $\boldsymbol{x}$: n変数ベクトル(x1,…, xn)$\in R^n$
  - f: $R^n \to R$
  - S: R^nの部分空間

- 制約なし問題の定式化
  - $S = R^n$である問題

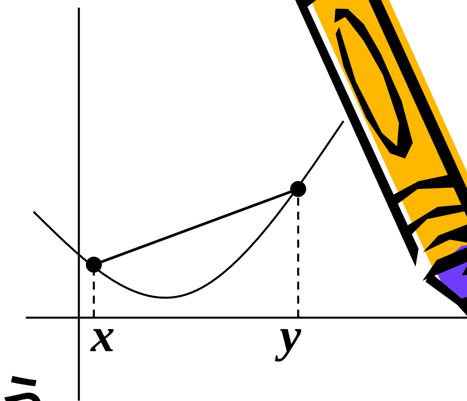
$$\text{目的関数：}\quad f(\boldsymbol{x}) \to \text{最小化}$$

非線形計画問題(３)



- 大域的最適解
  - その問題の真の最適解
- 局所的最適解
  - xの十分近くのどの実行可能解x+δxに対してもf(x)<f(x+δx)であるようなx
  - 局所最適解は一般に複数存在
  - 大域的最適解は局所的最適解の一つ

非線形計画問題(4)



- 凸関数
  - 関数fが下式を満たすとき、凸関数という

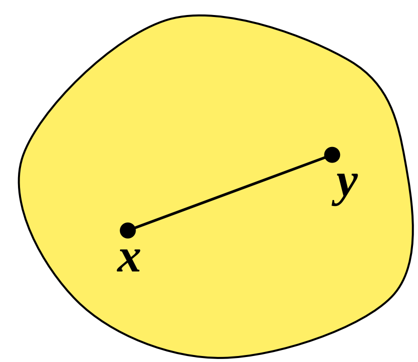
$$f(\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}),$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n, 0 \leq \forall \alpha \leq 1$$

- 凸集合
  - 集合Sが下式を満たすとき凸集合という

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in S$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \quad 0 \leq \forall \alpha \leq 1$$



非線形計画問題(5)

- 凸計画問題
  - Fが凸関数、Sが凸集合である非線形計画問題
- 定理5.1
  - 凸計画問題には、局所的最適解がひとつしかなく、それが大域的最適解となる

- 凸計画問題
  - 局所最適解をもとめればよい
- 一般の非線形計画問題
  - 局所最適解が求まっても、大域的最適解とは限らない

非線形計画問題(6)

- 関数の勾配
  - 点$\boldsymbol{x}$=(x1, …, xn)における関数f($\boldsymbol{x}$)の勾配を次のベクトル∇f($\boldsymbol{x}$)で表す

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

  - これは点$\boldsymbol{x}$の近傍において、fがもっとも増加する方向とその増加量を示す
  - f($\boldsymbol{x}$)の値が等しい$\boldsymbol{x}$からなる線（面）を等高線（面）といい、勾配は等高線（面）と垂直になる

非線形計画問題(7)

- ヘッセ行列
  - ▽f(x)をさらに微分した下記の行列

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{(\partial x_2)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix}$$

ヘッセ行列は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿であり、点x付近のfの勾配状況を示す

非線形計画問題(8)

- 半正定値
  - 任意のベクトル$\boldsymbol{x}$に対して $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$となる行列A
  - Aのすべての固有地が非負であることと等価
- 正定値
  - 任意のベクトル$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$に対して $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$となる行列A
  - Aのすべての固有地が正であることと等価

非線形計画問題(９)

- 制約なし問題の最適性条件
  - １次の必要条件
    - x*が局所最適解であるためには、

      でなければならない $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ （5．1）
  - ２次の必要条件
    - x*が局所最適解であるためには、式(5.1) かつ

      でなければならない $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$が半正定値 （5．2）
  - ２次の十分条件
    - 式(5.1)かつ $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$が正定値 （5．3）

      ならば、x*は局所最適解である

非線形計画問題（10）

- 式(5.1)
  - 必要条件であるが十分条件ではないので、これを満たしてもx^*が局所最適解であるとは限らない
  - たとえば、鞍点、最大値などの停留点
- 式(5.3)
  - 十分条件であって必要条件ではないので、局所的最適解であってもこの式をみたさないものがある

非線形計画問題（１１）

- 問題の分類
  - 制約なし問題・・・比較的やさしい
  - 制約つき問題・・・困難

  - 凸問題・・・・・・・・・・比較的易しい
  - 一般の問題・・・・・困難

非線形計画問題(12)

- 解法の分類
  - 制約なし問題
    - 最急降下法、ニュートン法、準ニュートン法
  - 制約つき問題
    - ペナルティ法、逐次二次計画法