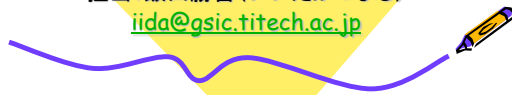


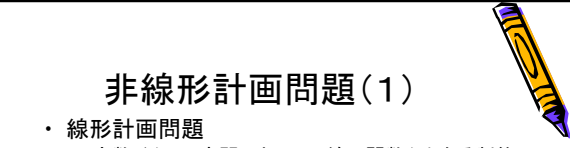


数理計画法E(第6学期) 第13回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp



2011/01/31 Katsuyoshi Iida (c) 1

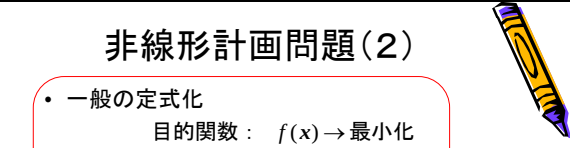


非線形計画問題(1)

- 線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において、線形関数からなる制約条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 組み合わせ最適問題
 - 有限個の中から解を選択する条件の下、線形関数からなる目的関数を最大化、あるいは最小化する問題
- 非線形計画問題
 - 実数ベクトル空間において目的関数を最大化、あるいは、最小化する問題



2011/01/31 Katsuyoshi Iida (c) 2



非線形計画問題(2)

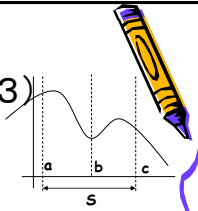
- 一般の定式化
 - 目的関数: $f(x) \rightarrow \text{最小化}$
 - 制約条件: $x \in S$
 - x : n 変数ベクトル($x_1, \dots, x_n$) $\in R^n$
 - $f: R^n \rightarrow R$
 - S : R^n の部分空間
- 制約なし問題の定式化
 - $S = R^n$ である問題
 - 目的関数: $f(x) \rightarrow \text{最小化}$



2011/01/31 Katsuyoshi Iida (c) 3

非線形計画問題(3)

- 大域的最適解
 - その問題の真の最適解
- 局所的最適解
 - x の十分近くのどの実行可能解 $x+\delta x$ に対しても $f(x) < f(x+\delta x)$ であるような x
 - 局所最適解は一般に複数存在
 - 大域的最適解は局所的最適解の一つ



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

4

非線形計画問題(4)

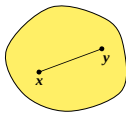
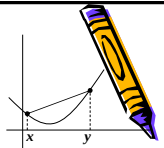
- 凸関数
 - 関数 f が下式を満たすとき、凸関数という

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

$$\forall x, y \in R^n, 0 \leq \alpha \leq 1$$
- 凸集合
 - 集合 S が下式を満たすとき凸集合という

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$$

$$\forall x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1$$



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

5

非線形計画問題(5)

- 凸計画問題
 - F が凸関数、 S が凸集合である非線形計画問題
- 定理5.1
 - 凸計画問題には、局所的最適解がひとつしかなく、それが大域的最適解となる
- 凸計画問題
 - 局所最適解をもとめればよい
- 一般の非線形計画問題
 - 局所最適解が求まっても、大域的最適解とは限らない



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

6

非線形計画問題(6)

• 関数の勾配

- 点 $x=(x_1, \dots, x_n)$ における関数 $f(x)$ の勾配を次のベクトル $\nabla f(x)$ で表す

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$$

- これは点 x の近傍において、 f がもっとも増加する方向とその増加量を示す
- $f(x)$ の値が等しい x からなる線(面)を等高線(面)といい、勾配は等高線(面)と垂直になる



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

7

非線形計画問題(7)

• ヘッセ行列

- $\nabla f(x)$ をさらに微分した下記の行列

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_2)^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix}$$



2011/ヘッセ行列は_____であり、点 x 付近の f の勾配状況を示す



非線形計画問題(8)

• 半正定値

- 任意のベクトル x に対して $x^T A x \geq 0$ となる行列 A
- A のすべての固有値が非負であることと等価

• 正定値

- 任意のベクトル $x \neq 0$ に対して $x^T A x > 0$ となる行列 A
- A のすべての固有値が正であることと等価



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

9

非線形計画問題(9)

- 制約なし問題の最適性条件

- 1次の必要条件

- x^* が局所最適解であるためには、

でなければならない $\nabla f(x^*) = 0$

(5.1)

- 2次の必要条件

- x^* が局所最適解であるためには、式(5.1)かつ

でなければならない $\nabla^2 f(x^*)$ が半正定値

(5.2)

- 2次の十分条件

- 式(5.1)かつ

$\nabla^2 f(x^*)$ が正定値

(5.3)

ならば、 x^* は局所最適解である

2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

10

非線形計画問題(10)

- 式(5.1)

- 必要条件であるが十分条件ではないので、これを満たしても x^* が局所最適解であるとは限らない

- たとえば、鞍点、最大値などの停留点

- 式(5.3)

- 十分条件であって必要条件ではないので、局所的最適解であってもこの式をみたさないものがある

2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

11

非線形計画問題(11)

- 問題の分類

- 制約なし問題・・・比較的やさしい

- 制約つき問題・・・困難

- 凸問題・・・・・・比較的易しい

- 一般の問題・・・・困難

2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

12

非線形計画問題(12)

- 解法の分類
 - 制約なし問題
 - ・ 最急降下法、ニュートン法、準ニュートン法
 - 制約つき問題
 - ・ ペナルティ法、逐次二次計画法



2011/01/31

Katsuyoshi Iida (c)

13