数理計画法E（第6学期）
第11回

担当：飯田勝吉（いいだかつよし）
iida@gsic.titech.ac.jp

組み合わせ最適化問題

- 欲張り法
  - アルゴリズムの途中過程で、近視眼的なローカル最適化を行うことで、問題全体のグローバル最適化を行おうとする方法の総称
  - 欲張り法の適用範囲は限られている
- 分枝限定法
  - 解空間の全ての候補を総当りで検索する際に、不必要な枝を先に刈り取ることで、計算量を削減する方法
- 動的計画法 (dynamic programming)
  - 問題全体の解を求めるために、小さい問題の最適解を求め、次第に拡張していく方法
- 近似解法 (heuristic methods)
  - 最適解の探索が困難な問題に利用する方法

分枝限定法(1)

- 総当りで実行可能解の中から最適解を探索する際に、不必要な場合分けを省略して計算量を削減する方法
- ここでは、ナップザック問題を例にして分枝限定法を説明する

分枝限定法(2)・ナップザック問題

- n個のアイテムはそれぞれ重さがaiであり、利用価値がciである。ナップザックには重さbまでしかいれられないとき、利用価値の和を最大にするにはどうすればよいか。

目的関数： $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to$ 最大化

制約条件： $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$

$x_i \in \{0,1\}$

ナップザックにものを
入れるとき1

分枝限定法（3）

- ナップザック問題（元の問題）

目的関数： $7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \to$ 最大化

制約条件： $4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 6$

$x_i \in \{0,1\}$

0か1のみを許す

- ______________＝元の問題の0-1条件を緩和

目的関数： $7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \to$ 最大化

制約条件： $4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 6$

$0 \le x_i \le 1 \quad (1 \le i \le 4)$

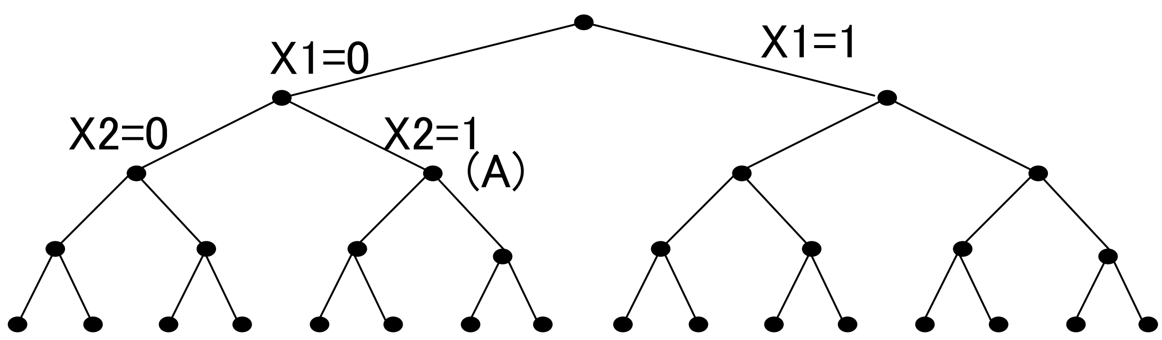
0～1の任意の実数を許す

分枝限定法(4)

- 前頁で導入した問題の解＝__________解
  - この場合、(1, 2/5, 0, 0)Tとなる
- __________解の性質
  - [0-1問題の実行可能領域]____[連続緩和問題の実行可能領域]
  - [0-1問題の最大値]____[連続緩和問題の最大値]
  - つまり、実数最適解における目的関数の値は0-1問題における最大値の上界となる
  - 実数最適解の変数が全て0-1条件を満たしているとき、これは0-1問題の最適解である
  - 連続緩和問題が実行可能解をもたないとき、0-1問題は__________

分枝限定法(5)

- 分枝図
  - 0-1問題の最適解は2^n個の実行可能解のなかに存在する。それを視覚的に表現する図



分枝限定法(6)

- 分枝図
  - 図中の最上位点は、0-1問題のすべての選択肢が未決定であることを示す
  - 2段目の二つの点は、x1をそれぞれ0か1に固定した場合の問題を示す。
  - 最下段の点は、すべての変数を固定した状態を示す。最下段の点すべての目的関数の値を調べると、総当りによって最適解の導出が可能
  - 2、3、4段目の示す問題を元の問題＝__________

分枝限定法（7）

- 部分問題の記法 $P(J_0, J_1)$
  - 0に固定されている添え字の集合J0
  - 1に固定されている添え字の集合J1
  - たとえば図中の（A)の点＝ $J_0 = \{1\}, \quad J_1 = \{2\}$
  - この点に対応する問題 $P(\{1\},\{2\})$

目的関数： $8 + x_3 + 2x_4 \to$ 最大化

制約条件： $5 + x_3 + 3x_4 \leq 6$

$x_i \in \{0,1\}$

この問題もナップザック問題

分枝限定法(８)

- 分枝限定法によるナップザック問題の解法
  1. 根にあたるもとの問題P($\emptyset$,$\emptyset$)の連続緩和問題を解き、実数最適解を導出。実数最適解が0-1条件を満たしているならば、最適解であるので終了。
  2. 一つの変数を0および1に固定した部分問題P({1}, $\emptyset$), P($\emptyset$, {1})を作成
  3. ２の部分問題の一つを選び、その連続緩和問題を解く。その結果により、以下の４つの場合がある。

分枝限定法(9)

- (a) 連続緩和問題に実行可能解が存在しない場合
  - 部分問題P(J0, J1)にも実行可能解が存在しない
- (b) 連続緩和問題によって得られた実数最適解が0-1条件を満たす場合
  - 実数最適解はP(J0, J1)の最適解となる。最適解の目的関数の値が暫定値よりおおきいならば、ここで得た解を新たな暫定解とする。
- (c) 連続緩和問題によって得られたP(J0, J1)の上界値が現在の暫定値よりも小さい場合
  - P(J0, J1)の実行可能解の中に元の問題の最適解が存在しない
- (d) 連続緩和問題によって得られた P(J0, J1) の上界値が、現在の暫定値よりも大きく、実数最適解が0-1条件を満たさない場合
  - P(J0, J1)の実行可能解の中に最適解が存在する可能性あり

分枝限定法(10)

- (a), (c)では、注目した部分問題の実行可能解の中には元の問題の最適解が存在しない。
- (b)では、注目した部分問題を厳密に解くことができたので、さらに部分問題を探索する必要がない
  - このように、さらなる部分問題を調べないで部分木の頂点で終わることを______という
- (d)の場合は、注目した部分問題を厳密に解くことが必要。そこで、現状の部分問題の自由変数を一つ選び、それを0または1に固定し、それぞれの部分問題を探索。
  - これを________という

4. すべての部分問題が終端したとき終了。それ以外は前頁の3に戻る。

分枝限定法(11)

- ある時点で終端されていない部分問題を________________といい、その集合をAと書く
- (0)初期の__________は欲張り法の解とする。つまり、暫定解は(1,0,1,0)で、暫定値は8。二つの部分問題 P({1}, ∅), P(∅, {1})を作成し、A={P({1}, ∅), P(∅, {1})}

分枝限定法（12）

- (1) 活性部分問題 P({1}, ∅) を選ぶ。つまり、x1=0で、目的関数：　$8x_2 + x_3 + 2x_4 \to$ 最大化

  制約条件：　$5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 6$

  $$x_i \in \{0,1\}$$

- となる。この問題の連続緩和問題を解くと、実数最適解は(x2, x3, x4) = (1, 1, 0)となり、0-1条件を満たしている。したがって11ページの___の場合である。この部分問題の目的関数の最大値は9となり、現在の暫定値より大きいので (0, 1, 1, 0)を暫定解とし、9を暫定値とする。P({1}, ∅)は終端できるので、A={P(∅, {1})} となる。

分枝限定法(13)

- (2) 活性部分問題 P(Ø, {1}) を選択。

$$\text{目的関数：}\quad 7+8x_2+x_3+2x_4 \to \text{最大化}$$

$$\text{制約条件：}\quad 4+5x_2+x_3+3x_4 \le 6$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

- この問題の連続緩和問題を解くと、実数最適解は(x2,x3,x4)=(2/5, 0, 0)となり、上界は10.2である。したがって、上の____の場合である。この部分問題中に最適解が得られる可能性があるので、変数x2を0または1に固定した部分問題を作成する。つまり、A={P({2},{1}), P(Ø, {1,2})}

分枝限定法(14)

- (3) P({2}, {1})を選択。つまり

$$\text{目的関数：}\quad 7 + x_3 + 2x_4 \to \text{最大化}$$
$$\text{制約条件：}\quad 4 + x_3 + 3x_4 \le 6$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

- 実数最適解は(x3, x4)=(1, 1/3)となり、上界は8.7である。11ページの_____の場合であり、最適解が得られる可能性はないので終端。この時点で*A*={P(∅, {1,2})}

分枝限定法（15）

- (4) P(∅, {1,2})を選択。

目的関数：　$7+8+x_3+2x_4 \to$ 最大化

制約条件：　$4+5+x_3+3x_4 \le 6$

$$x_i \in \{0,1\}$$

- この問題は実行可能解を持たないため、11ページの____の場合であり、終端。
- (5) 活性部分問題がなくなったので、現在の暫定解(0,1,1,0)を最適解として終了。

分枝限定法(16)

- 分枝限定法
  - すべての解を列挙して全探索した場合の結果と同様の最適解の導出が可能
  - ナップザック問題＝二つの部分問題で分割
  - 一般＝3つ以上の部分問題で分割

  - 計算量を削減するためには、与えられた問題ごとにいろいろな工夫が必要。たとえば
    - 効率的な上界値の計算方法
    - 活性部分問題の探索法
      - 深さ優先探索法
        - » 根元からもっと深い問題を選択
      - 最良優先探索法
        - » 各活性部分問題の目的関数の上界値を推定し、推定値の最大のものを選択

今後の授業

- 1/24（月）組み合わせ最適問題III
- 1/31（月）非線形計画問題
- 2/7（月）重要授業の復習

- 2/14（月）試験（５－６限）
  - 場所＝Ｓ６３５講義室