



数理計画法E(第6学期) 第8回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)

iida@gsic.titech.ac.jp



11/29第7回課題



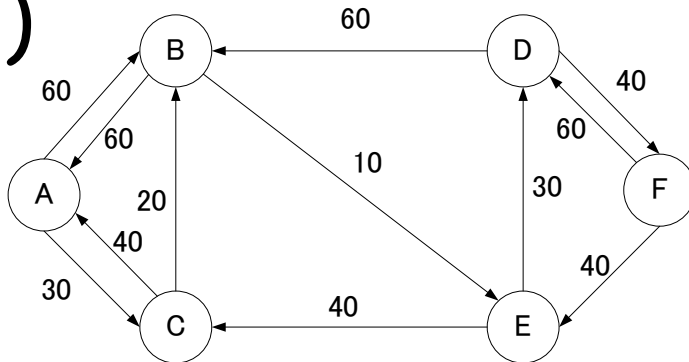
- (1)本稿9,10ページの例に対して、図(d)のフローに対する残余ネットワークを図示せよ。
- (2)(1)の残余ネットワークに対してさらなるフロー増加路を見つけ、さらに流量の増加したフローを図示せよ。
- (3) 12ページの(2)においてラベリング法を用いて増加路を求めよ。
- (4) (3)終了後の残余ネットワークを図示し、ラベリング法を用いて増加路を求めよ。さらに流量を増やすことは可能か



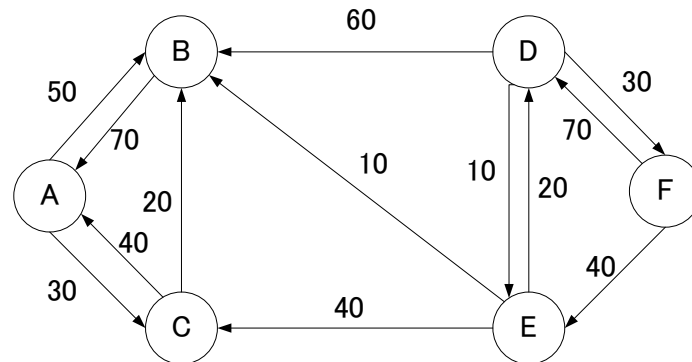
11/29第7回課題回答



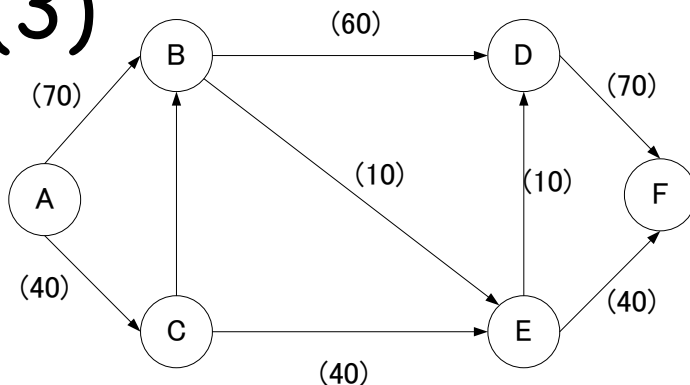
• (1)



• (4)



• (2),(3)



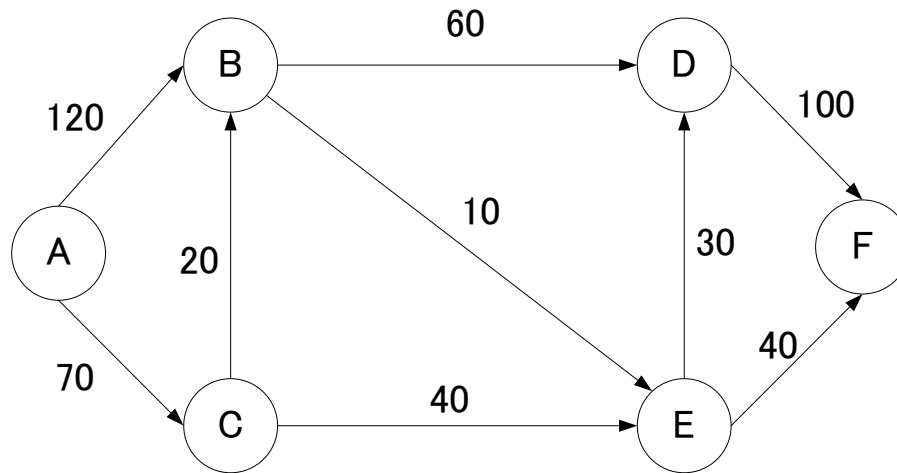
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

前回復習(1)

- 最大流問題

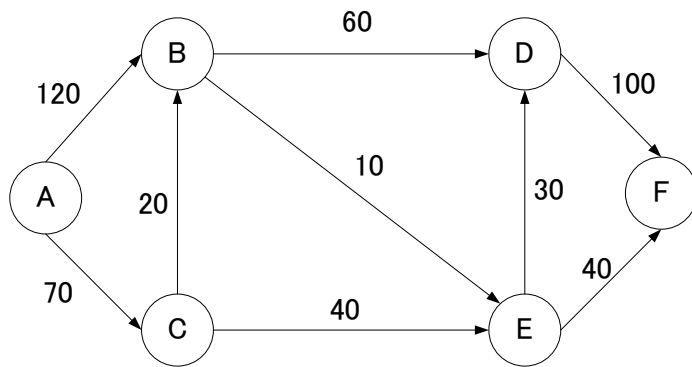
- 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことが出来るか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。



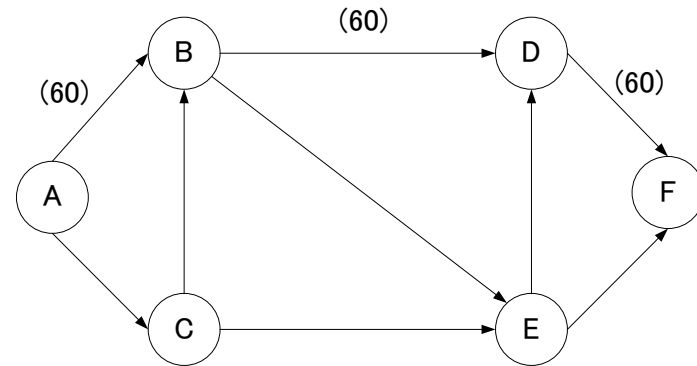
前回復習(2)



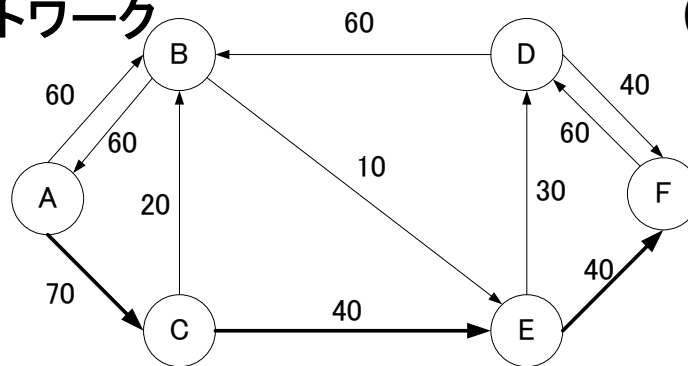
- ・ フロー増加路
 - フローに経路を追加→残余ネットワークの計算→...



(a)もとのネットワーク



(b)フロー

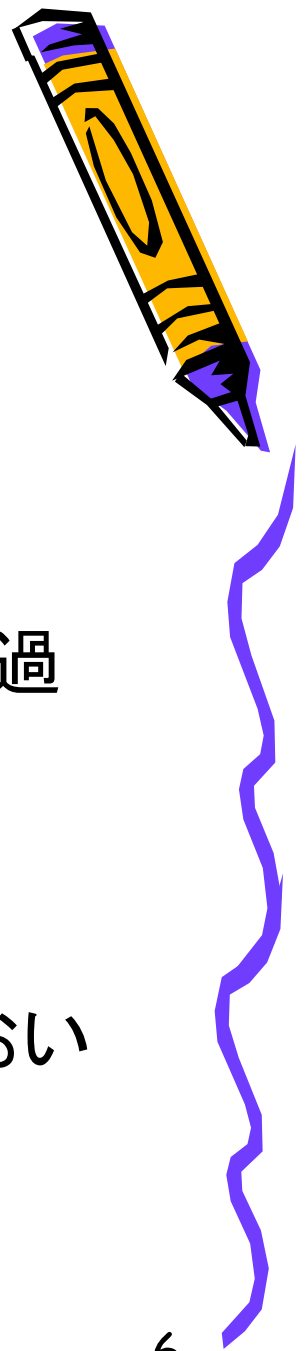


(c)残余ネットワーク



2010/12/06

最大流問題の2つ目の解法



- フロー増加法

- 計算過程でも流れ保存則を満足

- $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0 \quad (i \in V - \{s, t\})$

- プリフロープッシュ法

- 計算過程では、流入超過を許容、流出超過のみを満たすこととする

- $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} \leq 0 \quad (i \in V - \{s, t\})$

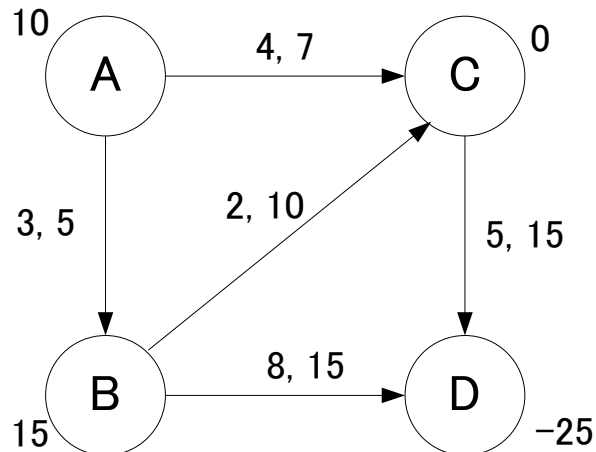
- プリフロー＝フロー生成過程のもの

- 理論的計算量、実際の計算時間双方において、フロー増加法よりも優秀

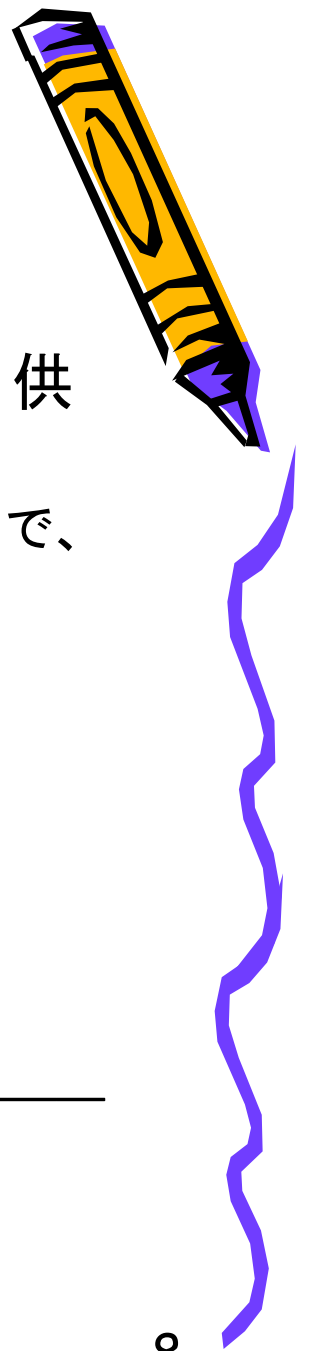


今回の講義：最小費用流問題(1)

- 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつコストを最小にするにはどうしたらよいか。(枝の値 = (コスト、容量)、節点に与えられた値 = 供給量(正)、需要量(負))



最小費用流問題(2)



- 線形計画問題としての定式化
 - 輸送コストを $c_{i,j}$ 、容量を $u_{i,j}$ とし、節点 $i \in V$ の需要・供給量を b_i とする。
 - $b_i > 0$ ならば供給(=始点)で、 $b_i < 0$ ならば需要(=終点)で、それぞれの量が $|b_i|$
 - $b_i = 0$ の節点 = 通過節点

目的関数 : $\sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \text{最小化}$

制約条件 : $\sum_{(v,j) \in E} x_{v,j} - \sum_{(i,v) \in E} x_{i,v} = b_v \quad (\forall v \in V)$



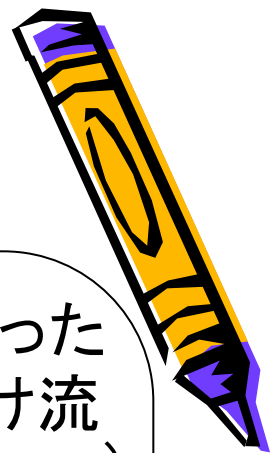
最小費用流問題(3)



- 二つの解法
 - バサッカー・ゴーウェン法
 - 費用が最小である経路にできるだけ多く流す
 - クライン法(負閉路除去法)
 - 全ての制約条件を満たす初期フローを与え、その残余ネットワークを計算
 - 残余ネットワーク中の負閉路を発見
 - 負閉路に沿ってフローを増加
 - を繰り返す
- (前提: 始点と終点が1ペアのみ存在)



バスサッカー・ゴーウェン法(1)

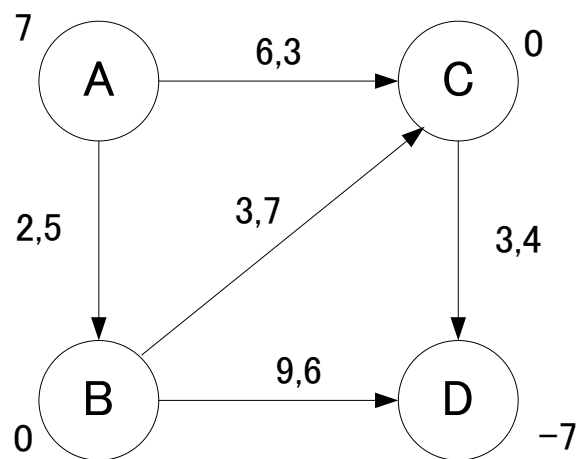


- (Step 1) 始点から終点までの最短路を探索。求まった経路が最小費用コストであるので、そこに出来るだけ流す。(流せる最大流 = _____)
- (Step 2) 得られたフローに対して残余ネットワークを構成。逆向き枝を生成する際、そのコストは元の枝の負の値とする。
- (Step 3) 残余ネットワークにおいて、最短の増加路を探索。
- (Step 4) Step 2 のフローに経路容量分の最短の増加路を増加、流量が制約条件を満たせば終了。そうでなければ Step 2 に戻る。



バスサッカー・ゴーウェン法(2)

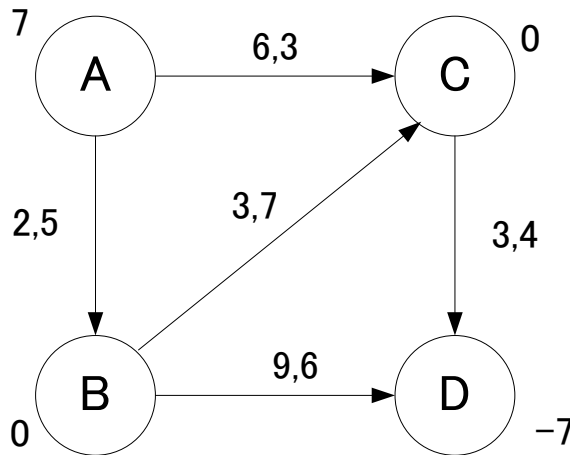
- ・ 下図の例で説明



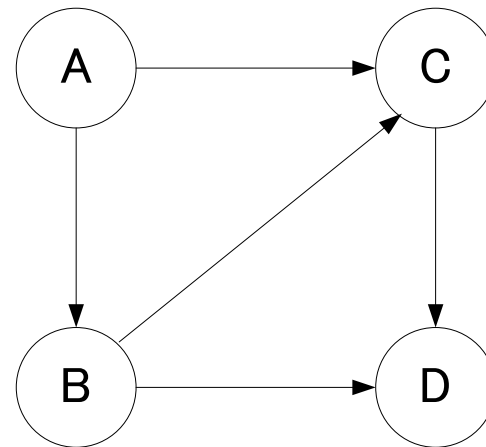
バスサッカー・ゴーウェン法(3)



- (1) AからDへの最短経路(A→____)は経路長が____。これはこの経路で1単位流すとコストが____がかかることを意味する。この経路の経路容量は____。



現在計算中のネットワーク



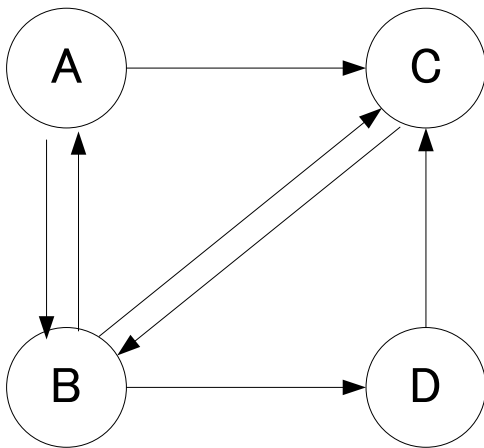
現在計算中のフロー



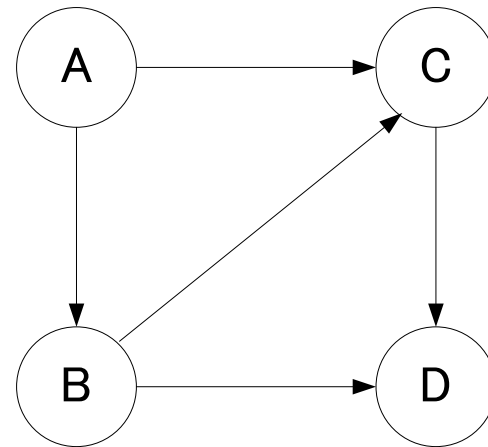
バスサッカー・ゴーウェン法(4)



- (2) 需要・供給量を満たしていないので、
残余ネットワークを構成し、最短路を計算
($A \rightarrow$ _____) は経路長が ____。この経路
の経路容量は ____。



現在計算中のネットワーク



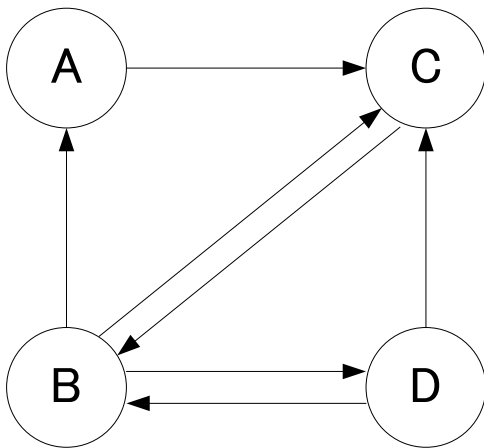
現在計算中のフロー



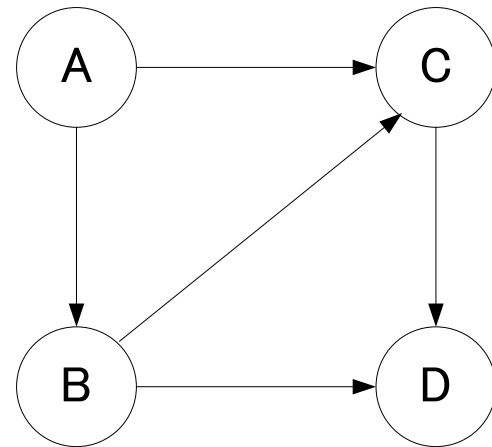
バスサッカー・ゴーウェン法(5)



- (3) 需要・供給量を満たしていないので、
残余ネットワークを構成し、最短路を計算
($A \rightarrow$ _____) は経路長が ____。この経路
の経路容量は ____。(2で十分 $\rightarrow$ 2流す)



現在計算中のネットワーク



最終的に求まったフロー



クライン法(1)



- ・ 別名 : 負閉路除去法

- 全ての制約条件を満たす初期フローからスタート
- 得られているフローの残余ネットワークを構築
- 長さが負の閉路 = _____
 - ・ これに沿って増加路を追加すると、総コストは _____
 - ・ 閉路であるため、増加路を追加しても、流量は _____



クライン法(2)



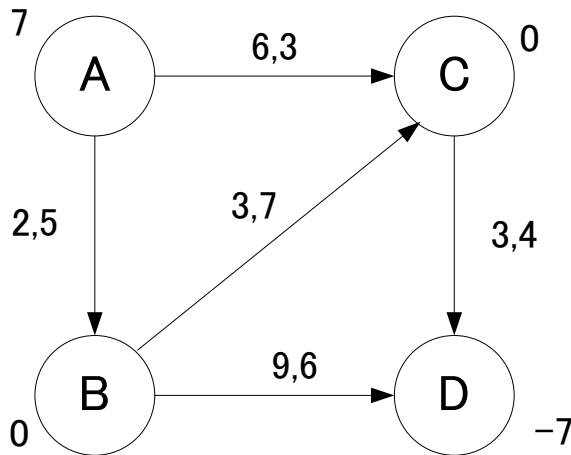
- (Step 1) 流れ保存則、容量制約条件を満たす初期フローに対して残余ネットワークを構成
- (Step 2) 残余ネットワークに対し、負閉路を探索。
- (Step 3) 負閉路に沿ってフローを流す。流す量は、_____。Step 2に戻る。



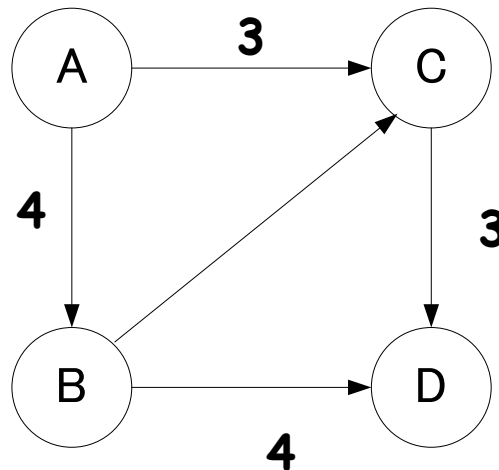
クライン法(3)



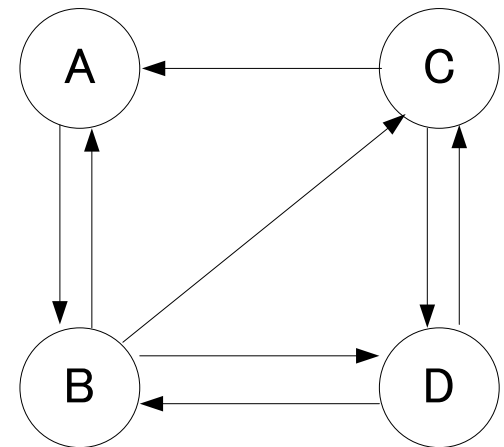
- (1) 残余ネットワークに対する負閉路を探
索すると、_____や_____が負
閉路になっている。



現在計算中のネットワーク



現在計算中のフロー



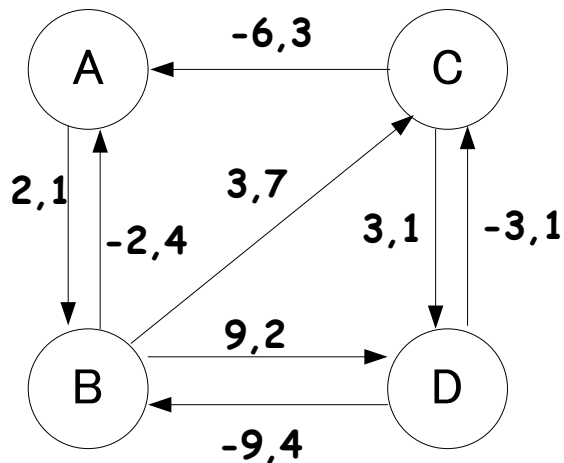
残余ネットワーク



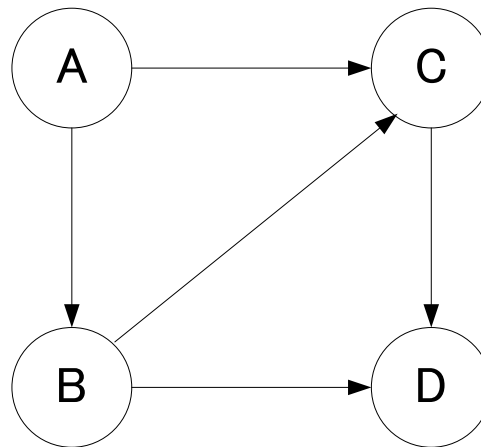
クライン法(4)



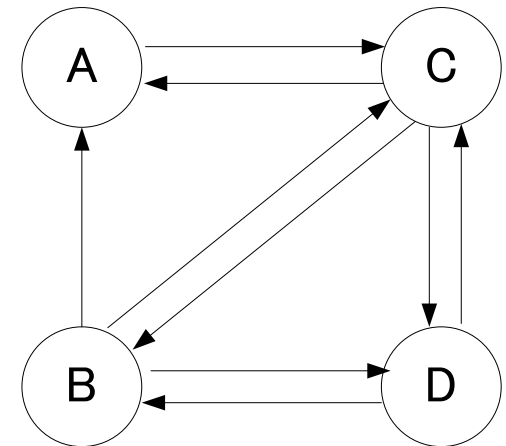
- (2) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ に着目すると、最小の経路容量は____であるから、フローにこれを追加し、その残余ネットワークを計算



現在計算中のネットワーク

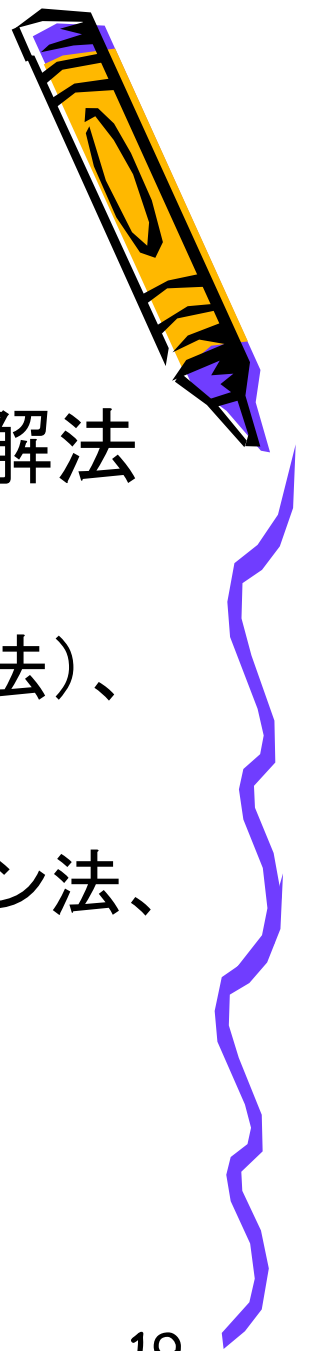


現在計算中のフロー



残余ネットワーク





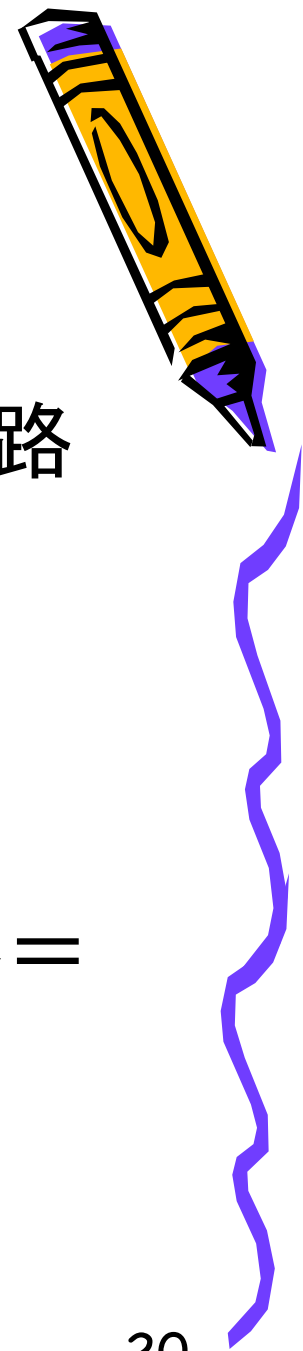
ネットワーク計画法のまとめ

- 代表的ネットワーク最適化問題とその解法
 - 最短路問題・・・ダイクストラ法
 - 最大流問題・・・フロー増加法(ラベリング法)、プリフロープッシュ法
 - 最小費用流問題・・・バサッカー・ゴーウェン法、クライン法

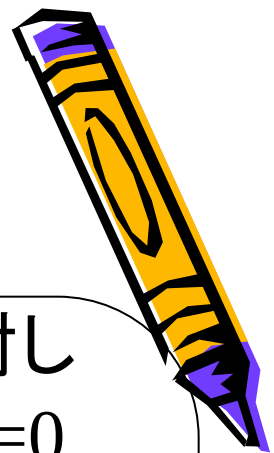


フロイド・ワーシャル法(1)

- 経路長が負の経路に適用可能な最短路探索アルゴリズム
 - ダイクストラ法は適用不能
- ネットワーク $G=(V,E)$ 、枝 $(i,j) \in E$ の長さ= a_{ij} (正とは限らない)



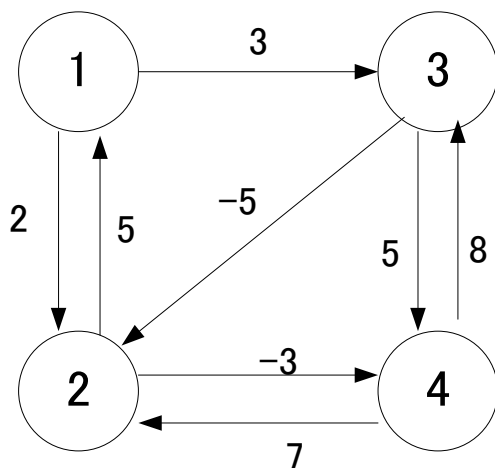
フロイド・ワーシャル法(2)



- (Step 0) 初期状態として、全ての $i, j \in V$ に対して、 $d(i, j) = a_{i, j}$, $p(i, j) = i$ としておく。ただし、 $d(i, i) = 0$ かつ、 $(i, j) \in E$ ならば、 $d(i, j) = \infty$ とする。全ての $k \in V$ に対し、Step 1を順に実施。
- (Step 1) 全ての $i (\neq k) \in V$ と $j (\neq k) \in V$ に対し
$$d(i, j) > d(i, k) + d(k, j) \text{ ならば } \begin{cases} d(i, j) \leftarrow d(i, k) + d(k, j) \\ p(i, j) \leftarrow p(k, j) \end{cases}$$
- とする。

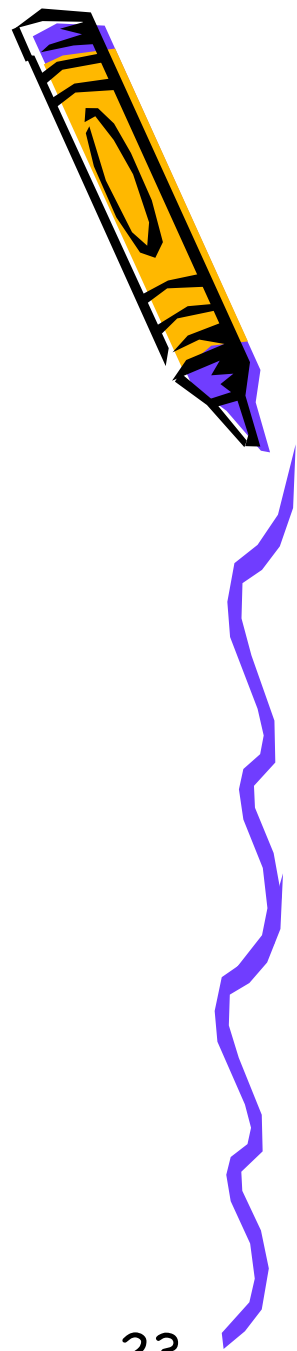


フロイド・ワーシャル法(3)



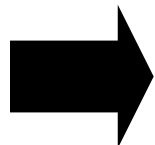
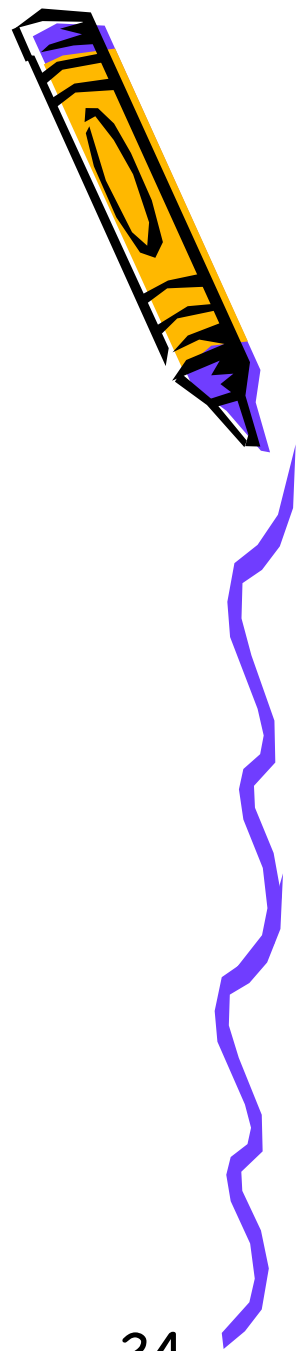
例: 負の距離を持つ枝を含むネットワーク





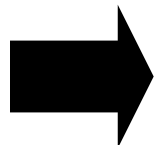
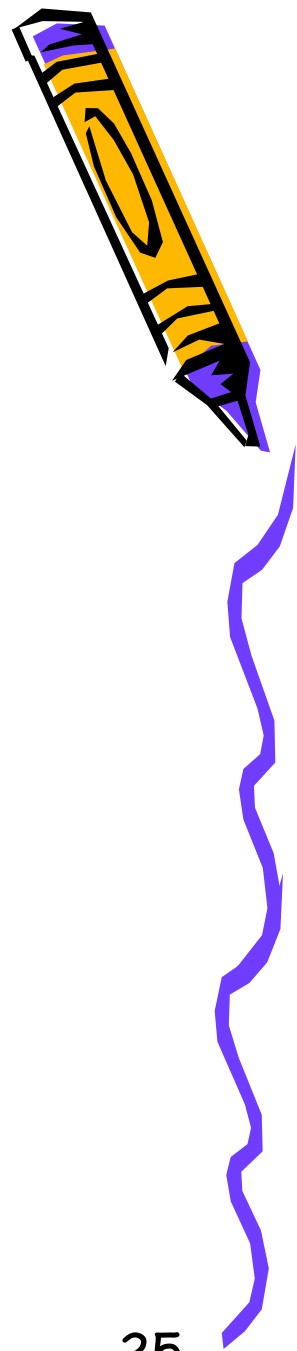
d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	∞ (1)
	2	5(2)	0(2)	∞ (2)	-3(2)
	3	∞ (3)	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	∞ (4)	7(4)	8(4)	0(4)





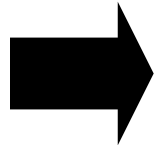
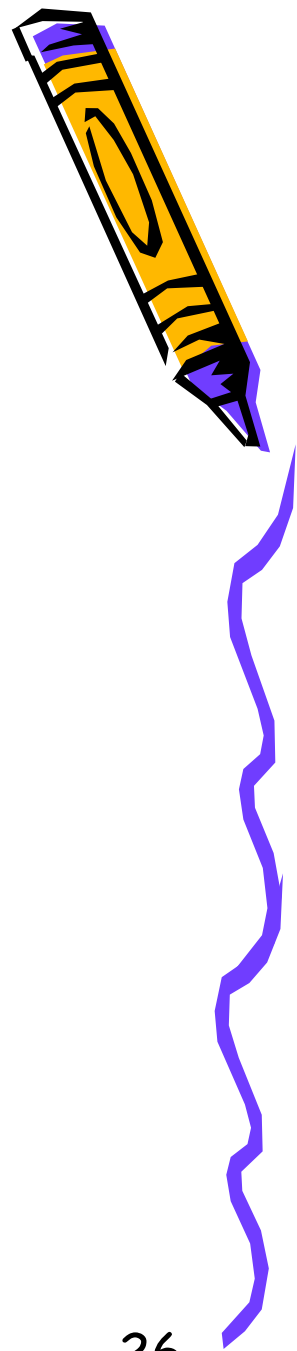
d(i,j), p(i,j)		j			
		<u>1</u>	2	3	4
i	<u>1</u>	<u>0(1)</u>	<u>2(1)</u>	<u>3(1)</u>	<u>∞(1)</u>
	2	<u>5(2)</u>	0(2)	8(1)	-3(2)
	3	<u>∞(3)</u>	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	<u>∞(4)</u>	7(4)	8(4)	0(4)





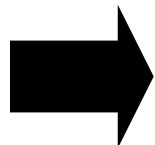
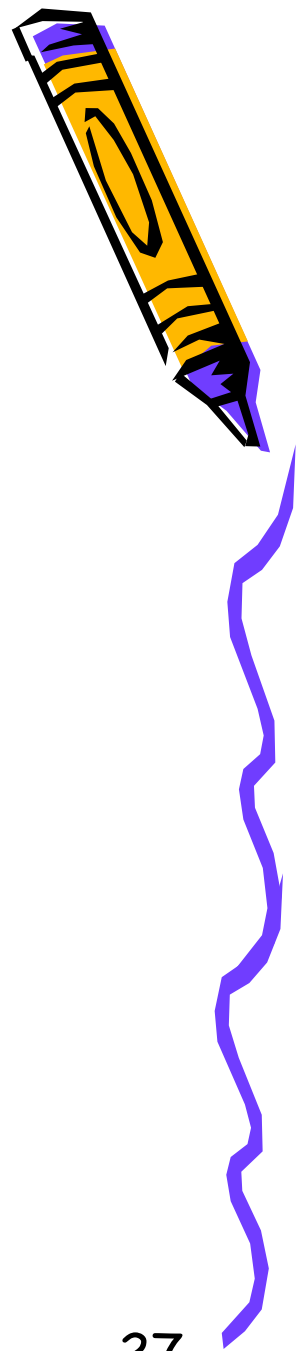
d(i,j), p(i,j)		j			
		1	<u>2</u>	3	4
i	1	0(1)	<u>2(1)</u>	3(1)	-1(2)
	<u>2</u>	<u>5(2)</u>	<u>0(2)</u>	<u>8(1)</u>	<u>-3(2)</u>
	3	0(2)	<u>-5(3)</u>	0(3)	-8(2)
	4	12(2)	<u>7(4)</u>	8(4)	0(4)





d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	<u>3</u>	4
i	1	0(1)	-2(3)	<u>3(1)</u>	-5(2)
	2	5(2)	0(2)	<u>8(1)</u>	-3(2)
	<u>3</u>	<u>0(2)</u>	<u>-5(3)</u>	<u>0(3)</u>	<u>-8(2)</u>
	4	8(2)	3(3)	<u>8(4)</u>	0(4)



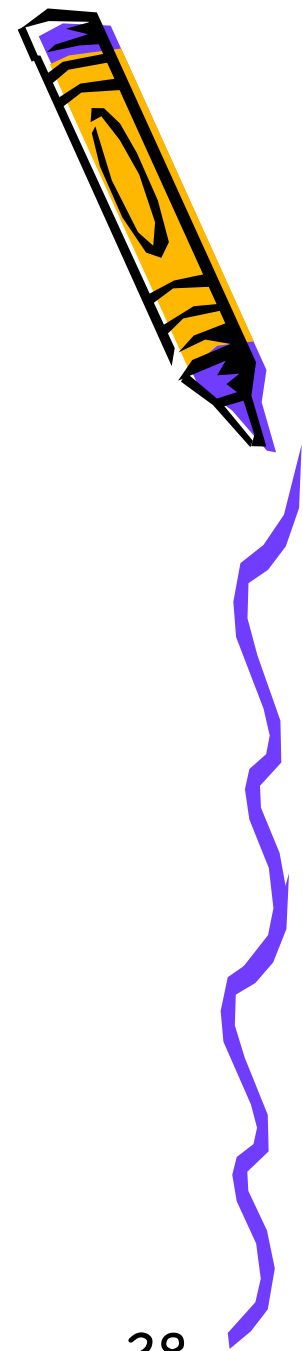


d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	<u>4</u>
i	1	0(1)	-2(3)	3(1)	<u>-5(2)</u>
	2	5(2)	0(2)	5(4)	<u>-3(2)</u>
	3	0(2)	-5(3)	0(3)	<u>-8(2)</u>
	<u>4</u>	<u>8(2)</u>	<u>3(3)</u>	<u>8(4)</u>	<u>0(4)</u>



フロイド・ワーシャル法(4)

- 負閉路を含む場合
 - k の選択順序によって解が不定
 - $\rightarrow$ 最短路の探索は不能
 - $d(i,i)$ の値が0から変化
 - $\rightarrow$ 負閉路の存在検出可能



フロイド・ワーシャル法(5)



- 応用例
 - バサッカー・ゴーウェン法における残余ネットワーク上の最短路の探索
 - フロイド法における負閉路の探索

