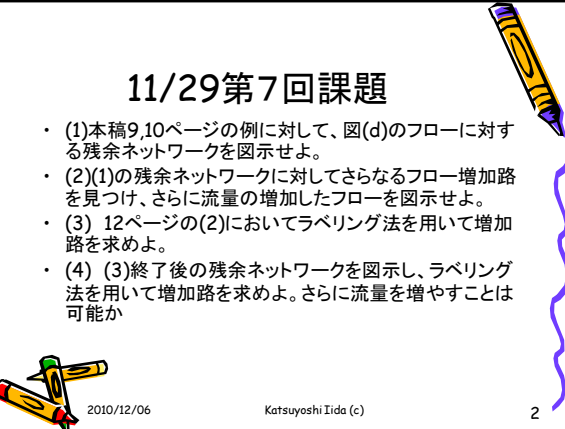




数理計画法E(第6学期) 第8回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

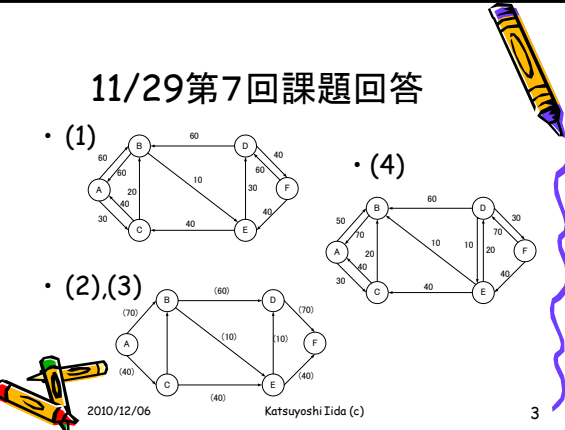
2010/12/06 Katsuyoshi Iida (c) 1



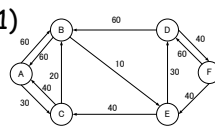
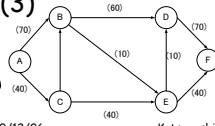
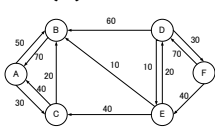
11/29第7回課題

- (1)本稿9,10ページの例に対して、図(d)のフローに対する残余ネットワークを図示せよ。
- (2)(1)の残余ネットワークに対してさらなるフロー増加路を見つけ、さらに流量の増加したフローを図示せよ。
- (3) 12ページの(2)においてラベリング法を用いて増加路を求めよ。
- (4) (3)終了後の残余ネットワークを図示し、ラベリング法を用いて増加路を求めよ。さらに流量を増やすことは可能か

2010/12/06 Katsuyoshi Iida (c) 2



11/29第7回課題回答

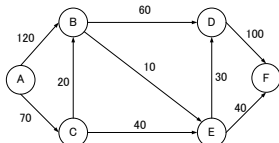
- (1)
- (2),(3)
- (4)

2010/12/06 Katsuyoshi Iida (c) 3

前回復習(1)

・最大流問題

- 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことができるか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。



2010/12/06

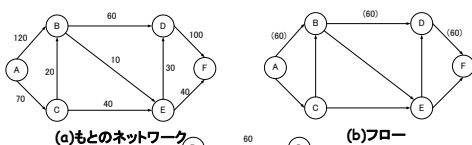
Katsuyoshi Iida (c)

4

前回復習(2)

・フロー増加路

- フローに経路を追加→残余ネットワークの計算→...



(a)もとのネットワーク

(b)フロー

(c)残余ネットワーク

2010/12/06

5

最大流問題の2つ目の解法

・フロー増加法

- 計算過程でも流れ保存則を満足

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = 0 \quad (i \in V - \{s, t\})$$

・プリフロープッシュ法

- 計算過程では、流入超過を許容、流出超過のみを満たすこととする

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} \leq 0 \quad (i \in V - \{s, t\})$$

- プリフロー＝フロー生成過程のもの

- 理論的計算量、実際の計算時間双方において、フロー増加法よりも優秀

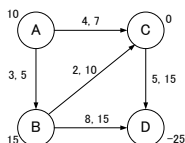
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

6

今回の講義: 最小費用流問題(1)

- 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつコストを最小にするにはどうしたらよいか。(枝の値=(コスト、容量)、節点に与えられた値=供給量(正)、需要量(負))



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

7

最小費用流問題(2)

線形計画問題としての定式化

- 輸送コストを $c_{i,j}$ 、容量を $u_{i,j}$ とし、節点 $i \in V$ の需要・供給量を b_i とする。

- $b_i > 0$ ならば供給(=始点)で、 $b_i < 0$ ならば需要(=終点)で、それぞれの量が $|b_i|$
- $b_i = 0$ の節点=通過節点

目的関数: $\sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \text{最小化}$

制約条件: $\sum_{(v,j) \in E} x_{v,j} - \sum_{(i,v) \in E} x_{i,v} = b_v \quad (\forall v \in V)$

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

8

最小費用流問題(3)

二つの解法

- バサッカー・ゴーウェン法
 - 費用が最小である経路にできるだけ多く流す
- クライン法(負閉路除去法)
 - 全ての制約条件を満たす初期フローを与え、その残余ネットワークを計算
 - 残余ネットワーク中の負閉路を発見
 - 負閉路に沿ってフローを増加
- を繰り返す

- (前提: 始点と終点が1ペアのみ存在)

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

9

バスッカー・ゴーウェン法(1)

- (Step 1) 始点から終点までの最短路を探索。求まった経路が最小費用コストであるので、そこに出来るだけ流す。(流せる最大流 =)
- (Step 2) 得られたフローに対して残余ネットワークを構成。逆向き枝を生成する際、そのコストは元の枝の負の値とする。
- (Step 3) 残余ネットワークにおいて、最短の増加路を探索。
- (Step 4) Step 2 のフローに経路容量分の最短の増加路を増加、流量が制約条件を満たせば終了。そうでなければ Step 2 に戻る。

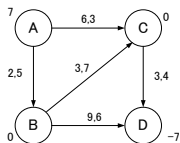
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

10

バスッカー・ゴーウェン法(2)

- 下図の例で説明



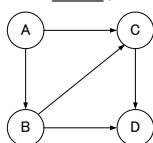
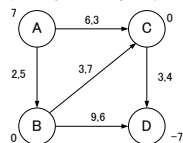
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

11

バスッカー・ゴーウェン法(3)

- (1) AからDへの最短経路(A→)は経路長が 。これはこの経路で1単位流すとコストが がかかることを意味する。この経路の経路容量は 。



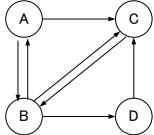
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

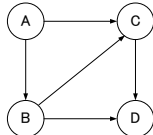
12

バサッカー・ゴーウェン法(4)

- (2) 需要・供給量を満たしていないので、残余ネットワークを構成し、最短路を計算 ($A \rightarrow$)は経路長が 。この経路の経路容量は 。



現在計算中のネットワーク



現在計算中のフロー

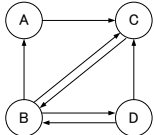
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

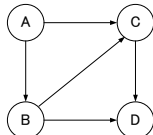
13

バサッカー・ゴーウェン法(5)

- (3) 需要・供給量を満たしていないので、残余ネットワークを構成し、最短路を計算 ($A \rightarrow$)は経路長が 。この経路の経路容量は 。(2で十分→2流す)



現在計算中のネットワーク



最終的に求めたフロー

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

14

クライン法(1)

- 別名: 負閉路除去法
 - 全ての制約条件を満たす初期フローからスタート
 - 得られているフローの残余ネットワークを構築
 - 長さが負の閉路=
 - これに沿って増加路を追加すると、総コストは
 - 閉路であるため、増加路を追加しても、流量は

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

15

クライン法(2)

- (Step 1) 流れ保存則、容量制約条件を満たす初期フローに対して残余ネットワークを構成
- (Step 2) 残余ネットワークに対し、負閉路を探索。
- (Step 3) 負閉路に沿ってフローを流す。流す量は、_____。Step 2に戻る。



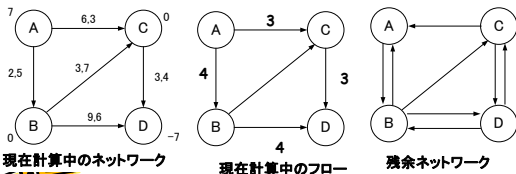
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

16

クライン法(3)

- (1) 残余ネットワークに対する負閉路を探索すると、_____や_____が負閉路になっている。



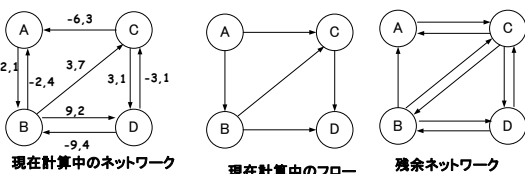
2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

17

クライン法(4)

- (2) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ に着目すると、最小の経路容量は_____であるから、フローにこれを追加し、その残余ネットワークを計算



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

18

ネットワーク計画法のまとめ

- 代表的ネットワーク最適化問題とその解法
 - 最短路問題・・・ダイクストラ法
 - 最大流問題・・・フロー増加法(ラベリング法)、プリフロープッシュ法
 - 最小費用流問題・・・バスッカー・ゴーウェン法、クライン法



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

19

フロイド・ワーシャル法(1)

- 経路長が負の経路に適用可能な最短路探索アルゴリズム
 - ダイクストラ法は適用不能
- ネットワーク $G=(V,E)$ 、枝 $(i,j) \in E$ の長さ= a_{ij} (正とは限らない)



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

20

フロイド・ワーシャル法(2)

- (Step 0) 初期状態として、全ての $i,j \in V$ に対して、 $d(i,j)=a_{ij}$, $p(i,j)=i$ としておく。ただし、 $d(i,i)=0$ かつ、 $(i,j) \in E$ ならば、 $d(i,j)=\infty$ とする。全ての $k \in V$ に対し、Step 1を順に実施。
- (Step 1) 全ての $i(\neq k) \in V$ と $j(\neq k) \in V$ に対し
$$d(i,j) > d(i,k) + d(k,j) \text{ ならば } \begin{cases} d(i,j) \leftarrow d(i,k) + d(k,j) \\ p(i,j) \leftarrow p(k,j) \end{cases}$$
- とする。

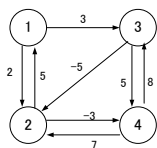


2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

21

フロイド・ワーシャル法(3)



例: 負の距離を持つ枝を含むネットワーク

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

22

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	∞ (1)
	2	5(2)	0(2)	∞ (2)	-3(2)
	3	∞ (3)	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	∞ (4)	7(4)	8(4)	0(4)

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

23



d(i,j), p(i,j)		j			
		<u>1</u>	2	3	4
i	<u>1</u>	<u>0(1)</u>	<u>2(1)</u>	<u>3(1)</u>	<u>∞(1)</u>
	2	<u>5(2)</u>	0(2)	8(1)	-3(2)
	3	<u>∞(3)</u>	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	<u>∞(4)</u>	7(4)	8(4)	0(4)

2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

24

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	<u>2</u>	3	4
i	1	0(1)	<u>2</u> (1)	3(1)	-1(2)
	<u>2</u>	<u>5</u> (2)	<u>0</u> (2)	<u>8</u> (1)	<u>-3</u> (2)
	3	0(2)	<u>-5</u> (3)	0(3)	-8(2)
	4	12(2)	<u>7</u> (4)	8(4)	0(4)

2010/12/06Katsuyoshi Iida (c)25

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	<u>3</u>	4
i	1	0(1)	-2(3)	<u>3</u> (1)	-5(2)
	2	5(2)	0(2)	<u>8</u> (1)	-3(2)
	<u>3</u>	<u>0</u> (2)	<u>-5</u> (3)	<u>0</u> (3)	<u>-8</u> (2)
	4	8(2)	3(3)	<u>8</u> (4)	0(4)

2010/12/06Katsuyoshi Iida (c)26

d(i,j), p(i,j)		j			
		1	2	3	<u>4</u>
i	1	0(1)	-2(3)	3(1)	<u>-5</u> (2)
	2	5(2)	0(2)	5(4)	<u>-3</u> (2)
	3	0(2)	-5(3)	0(3)	<u>-8</u> (2)
	<u>4</u>	<u>8</u> (2)	<u>3</u> (3)	<u>8</u> (4)	<u>0</u> (4)

2010/12/06Katsuyoshi Iida (c)27

フロイド・ワーシャル法(4)

- ・ 負閉路を含む場合
 - k の選択順序によって解が不定
 - ・ $\rightarrow$ 最短路の探索は不能
 - $d(i,i)$ の値が0から変化
 - ・ $\rightarrow$ 負閉路の存在検出可能



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

28

フロイド・ワーシャル法(5)

- ・ 応用例
 - バサッカー・ゴーウェン法における残余ネットワーク上の最短路の探索
 - フロイド法における負閉路の探索



2010/12/06

Katsuyoshi Iida (c)

29
