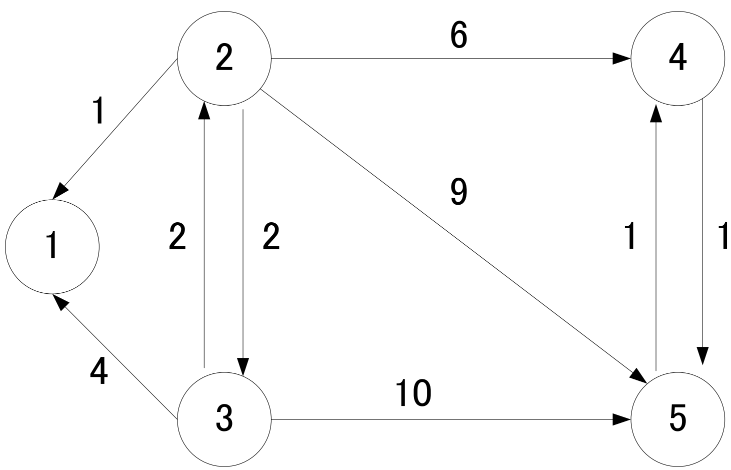
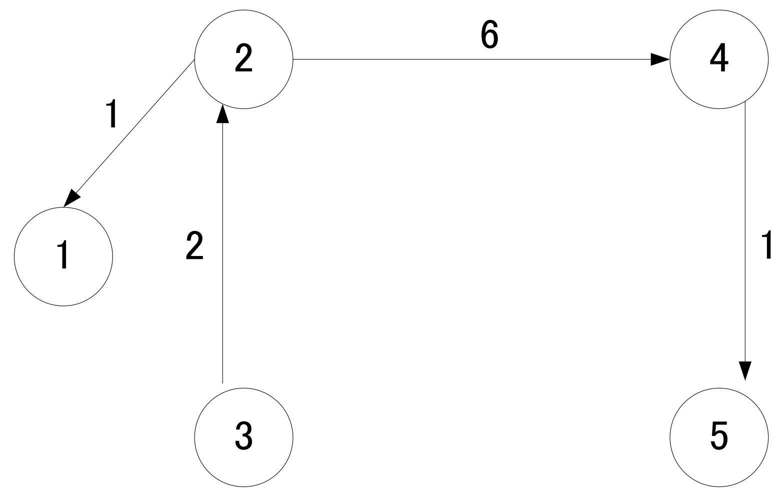
数理計画法E（第6学期）
第7回

担当：飯田勝吉（いいだかつよし）
iida@gsic.titech.ac.jp

前回課題回答

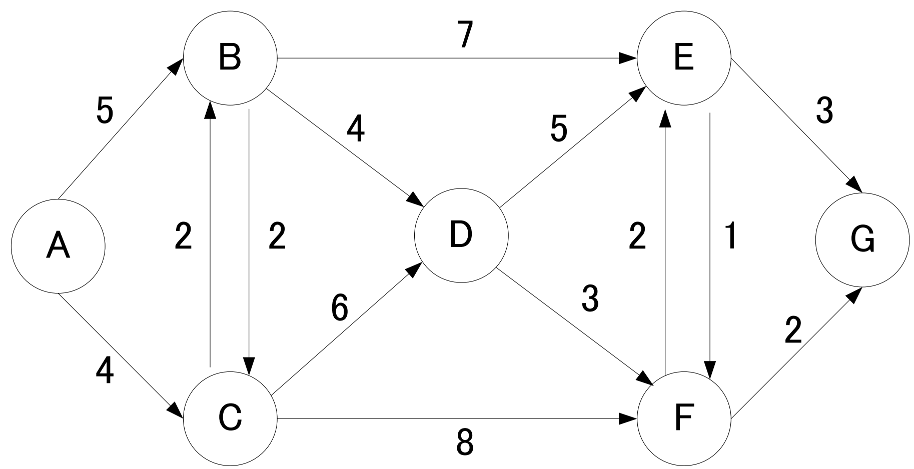
- 下図において節点3を始点とする最短路木を求めよ。





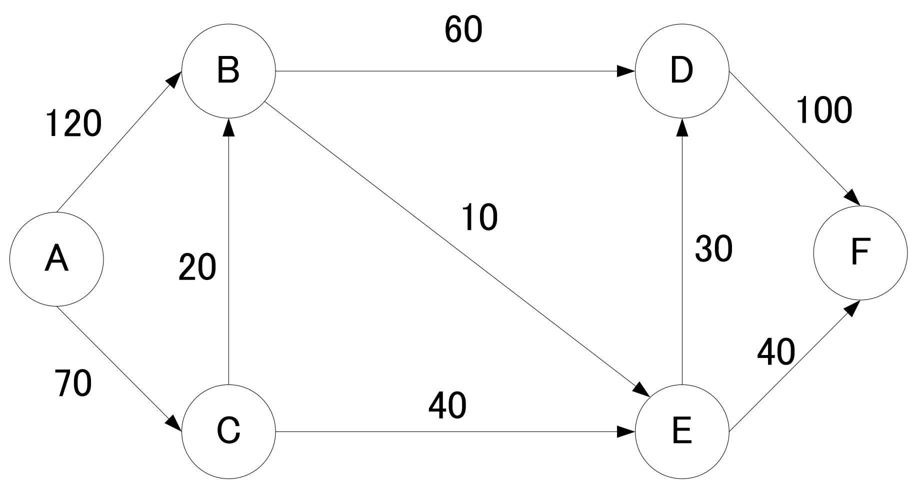
ネットワーク計画法

- 最短路問題
  - 節点Aから節点G間で最短で行くための経路を求めよ。ただし、枝に与えられた値はその枝の長さを表す。



ネットワーク計画法

- 最大流問題
  - 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことが出来るか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。



最大流問題（１）

- 始点をs、終点をt、枝(i,j)の容量をuij、枝(i,j)に流す量の変数をxijとすると

目的関数： __ → 最大化

制約条件： $$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in E} x_{js} = f \qquad (3.3)$$

______________________________ (3.4)

______________________________ (3.5)

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad ((i,j) \in E) \qquad (3.6)$$

最大流問題（2）

- 式3．4を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という
- 式3．6を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という
  - この二つを満たす$\boldsymbol{x}=\{x_{ij}\}$を＿＿＿＿＿＿という
  - このときのfの値を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という
- 最大流問題
  - 流量が最大となるフローを求める問題

インターネットにおけるフロー

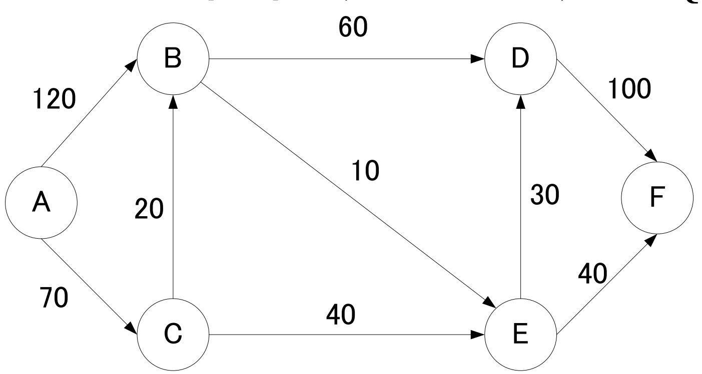
- IPv4, IPv6
  - 5 tupple
    - Source IP address, Destination IP address, Source port number, Destination, port number, Protocol identifier (=TCP or UDP)
- IPv6
  - Flow label
- 通常、単一の始点・終点ペアにおいて、複数経路を同時に使った通信は行わない
  - 行う場合はマルチパス通信と呼ばれる

フロー増加法（1）

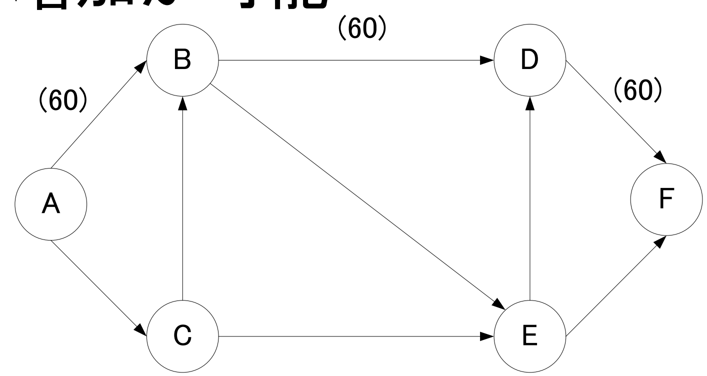
- あるフロー $x=\{x_{ij}\}$が得られていると仮定
  - （本稿では、以下簡単のため枝(i,j)と枝(j,i)が同時に存在することがないと仮定）
- 残余ネットワーク
  - 元のネットワークG=(V,E)の各枝(i,j)∈Eを容量 $u_{ij}^{x}=u_{ij}-x_{ij}$を持つ枝(j,i)に置き換えたネットワーク。
  - ただし、$u_{ij}^{x}=0$ の場合はその枝を除外し、uij の容量を持つ枝_______を設ける。
  - u_{ij}^{x}の値を__________________と呼ぶ。

フロー増加法(2)

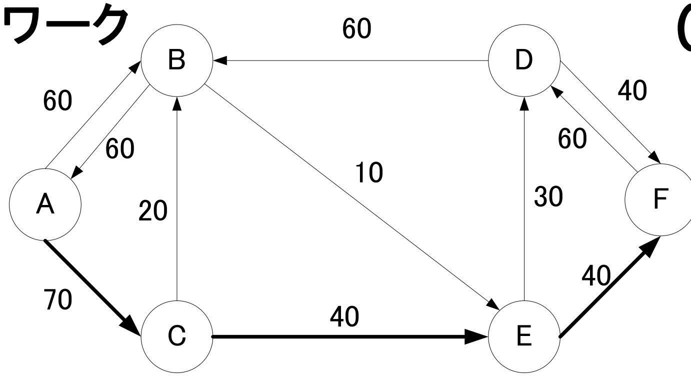
- フロー増加路
  - 残余ネットワークにおける始点から終点までの経路
  - 存在するとき、$\boldsymbol{x}=\{x_{ij}\}$の増加が可能



(a)もとのネットワーク



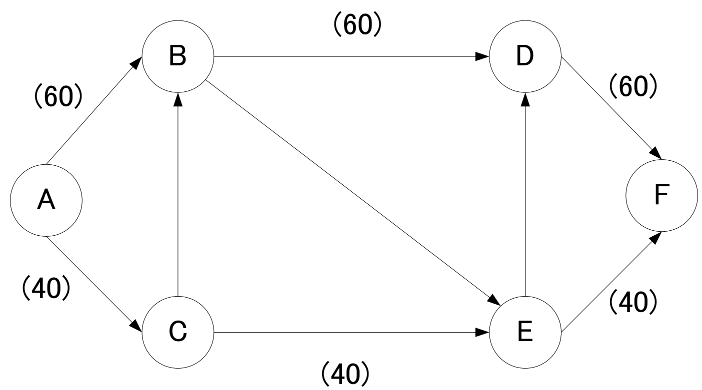
(b)フロー



(c)残余ネットワーク

フロー増加法(3)

- 前頁の例では、経路が存在するため、フロー流量の増加が可能
- 増加路によって増加できる流量＝増加路に含まれる枝の残余容量の______
- この場合は______



(d)流量の増加した新しいフロー

フロー増加法（4）

- (Step 0) 初期フローを得る。（全ての枝について xij=0）
- (Step 1) 残余ネットワークを作り、フロー増加路を見つける。存在しなければ終了。
- (Step2) フロー増加路に沿って、フローを追加する。追加するフロー流量はフロー増加路に含まれる枝の______________となる。(Step 1)に戻る

フロー増加法(5)

- フロー増加法
  - 残余ネットワークからのフロー増加路の探索が必要
  - 大きなネットワークでは探索は困難
- 課題
  - (1)本稿9,10ページの例に対して、図(d)のフローに対する残余ネットワークを図示せよ。
  - (2)(1)の残余ネットワークに対してさらなるフロー増加路を見つけ、さらに流量の増加したフローを図示せよ。

ラベリング法(1)

- ネットワークG=(V,E)と始点s∈Vと終点t∈Vが与えられたとき、始点から終点への経路を得るアルゴリズム
  - フロー増加路の探索に利用
  - ソースから到達可能な点に順次ラベルを付ける

ラベリング法(2)

- (Step 0) 初期状態として L={s}, S={}とし、全ての節点i∈Vに対しp(i)=0
- (Step 1) 節点 $\hat{i} \in L \setminus S$ を一つ選び $S \leftarrow S \cup \{\hat{i}\}$とする。
- (Step 2) 全ての枝 $(\hat{i}, j) \in E$ について以下を行う

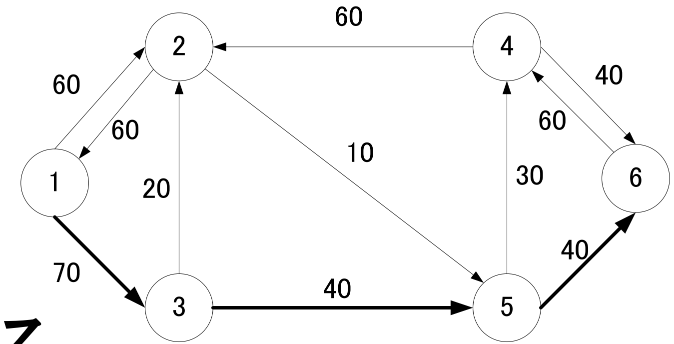
  $j \notin L$　ならば　$L \leftarrow L \cup \{j\}, p(j) \leftarrow \hat{i}$
- (Step 3)t∈LまたはL=Sならば終了。そうでなければStep 1に戻る。

ラベリング法(3)

- 集合Lはラベル付けされた

(＝_______________________________________)節点の集合

- 集合 $S(\subseteq L)$ はその節点から一つ先の節点まで到達可能か調べ終わった(＝____________)の節点の集合
- アルゴリズム終了条件
  - t∈Lで終了した場合は始点から終点までの経路(つまり増加路)が求まったこととなる。
  - L=Sで終了した場合は、経路が存在しないことを意味するので、フロー増加法も終了する。

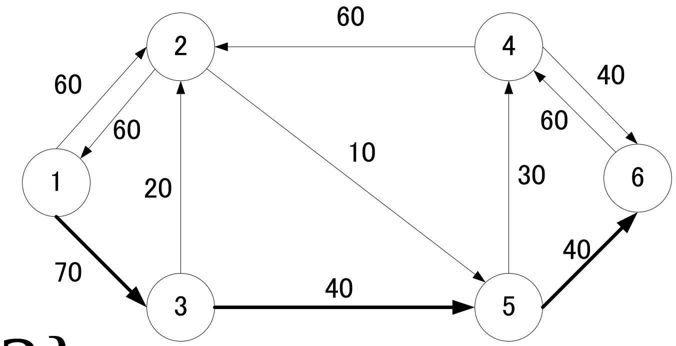


ラベリング法(4)

- 例として9頁の図(c)を考える
- (0) 初期状態は、L={1}, S={}, p(1)=p(2)=･･･=p(6)=0
- (1) L＼S={1}より $\hat{i}=1$ を選択。S={1}。(1,2),(1,3)∈Eより、L={1,2,3},p(2)=p(3)=1
- (2) L＼S={2,3}より $\hat{i}=2$ を選択。S={1,2}。

________∈Eより、L←{__________},__________

ラベリング法(5)



- (3) $\hat{i}=3$ を選択、S={1,2,3}。 ________∈Eだが、_____はすでにLに含まれているので更新しない
- (4) $\hat{i}=5$ を選択、S={__________} ________∈Eより、L={__________}, ________。

ラベリング法(6)

- 終了条件より節点1から節点6への経路探索完了
- p(6)=5, p(5) = 2, p(2) = 1と逆にたどることにより、________________が得られる

ラベリング法（7）

- 経路を求める過程（下線＝次のラウンドで選択される節点）

	1	2	3	4	5	6
(0)	$\underline{0}$	0	0	0	0	0
(1)		$\underline{1}$	1	0	0	0
(2)			$\underline{1}$	0	2	0
(3)				0	$\underline{2}$	0
(4)				5		5

課題

- (3) 12ページの課題(2)においてラベリング法を用いて増加路を求めよ。
- (4) (3)終了後の残余ネットワークを図示し、ラベリング法を用いて増加路を求めよ。さらに流量を増やすことは可能か。

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(1)

- ラベリング法を用いたフロー増加法によって最大流が求まることを示す。
- カット:
  - 節点集合Vを始点を含む集合Sとシンクを含む集合Tに分割したもの
  - カット(S,T)に対して、$i \in S$, $j \in T$, $(i,j) \in E$ のとき、$(i,j) \in (S,T)$と書く
  - 逆に、$i \in T$, $j \in S$, $(i,j) \in E$のとき$(i,j) \in (T,S)$と書く

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(2)

- カットの容量
  - 全ての枝(i,j)∈(S,T)の容量uijの和をカットの容量と呼びC(S,T)と書く。つまり

$$C(S,T)=\sum_{(i,j)\in(S,T)} u_{ij}.$$

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(3)

- **x**を任意のフロー、*f*をその流量、(S,T)を任意のカットとすると

$$C(S,T) = \sum_{(i,j)\in(S,T)} u_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in(S,T)} x_{ij}$$

$$f = \sum_{(i,j)\in(S,T)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in(T,S)} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in(S,T)} x_{ij}$$

の2式が成立。したがって

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(4)

$$f \ \underline{\qquad\quad}\ C(S,T)$$

すなわち

$$\max_{x} f \ \underline{\qquad\quad}\ \min_{(S,T)} C(S,T) \qquad \textbf{(3.7)}$$

が成立。

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(5)

- 以下のフロー増加法の過程を想定
  - Step1の探索(＝ラベリング法)が終了
- ラベリング法の終了条件より
  - 残余ネットワークG^x=(V, E^x)に対して始点sを含み、終点tを含まない節点集合S*を獲得
  - T*=V＼S*と定義すると、(S*,T*)＝カット
  - E^xにはS*内の節点からT*内の接点への枝が存在しない

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(6)

- したがって
  - (i,j)∈(S*,T*)ならば $\underline{\quad x^*_{ij} = u_{ij} \quad}$ である。
    - $x^*_{ij} < u_{ij}$を仮定すると、残余ネットワークには $u^x_{ij} = \underline{\quad u_{ij} - x^*_{ij} \quad}$ の容量を持つS*からT*への枝(i,j)が存在することになり矛盾。
  - (i,j)∈(T*,S*)ならば $\underline{\quad x^*_{ij} = 0 \quad}$ である。
    - $x^*_{ij} > 0$を仮定すると、残余ネットワークには $u^x_{ji} = \underline{\quad u_{ji} - x^*_{ji} \quad}$ の容量を持つS*からT*への枝(j,i)が存在することになり矛盾。

フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理(7)

- よってフローx*の流量 f*は

$$f^* = \sum_{(i,j)\in(S^*,T^*)} x_{ij}^* - \sum_{(i,j)\in(T^*,S^*)} x_{ij}^* = \sum_{(i,j)\in(T^*,S^*)} u_{ij} = C(S^*,T^*)$$

を満たしている。24頁式(3.7)より f*が最大流量であることがわかり、x*が最大流となっている。

[定理 3.1] （最大流最小カット定理）

任意のネットワークにおいてフローの最大流量とカット容量の最小値は等しくなる。

フロー増加法の計算量と改良（1）

- フロー増加法の計算量
  - n:節点数、m:枝数、U:枝容量の最大値
  - 枝容量が全て整数と仮定
  - １回のラベリング法の計算量は枝の本数に比例: O(m)
  - フロー増加法の各ラウンドで少なくとも流量は1増える。また、最大流量は高々 mU。したがって、フロー増加法の繰り返し回数は高々mU
  - よって、全体では $O(m^2U)$ となる。

フロー増加法の計算量と改良(2)

- フロー増加法の計算量の特徴
  - Uに依存
  - Uが大きいとき非効率
- 改良方法1
  - 複数のフロー増加路が存在する場合、必ず最も短い(枝数の少ない)経路を選ぶことにすると、フロー増加法の繰り返し回数がmn/2以下になることが知られている。
  - このとき $O(m^2 n)$ となる。m<nのとき、有利。

フロー増加法の計算量と改良（3）

- 改良方法2
  - 1度に複数のフロー増加路を求めて多数の増加路によってフローを増加させる。たとえば、あるラウンドでは枝数が3のフロー増加路を全て求め、全ての増加路にしたがってフローを追加する。次の繰り返しでは枝数が3の増加路は存在しないので、今度は枝数4の増加路全てを求める。
  - すると、繰り返し回数は高々n
  - 複数の増加路を1度に求める計算量はO(mn)
  - よって、全体では$O(mn^2)$となり、m>nのとき有利