数理計画法E（第6学期）
第3回

担当：飯田勝吉（いいだかつよし）
iida@gsic.titech.ac.jp

前回の課題の回答

- 1. 目的関数：$-x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow$ 最小化
  制約条件：$x_1 + x_2 + x_4 = 10$
  $-x_1 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 8$
  $x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x'_3 \geq 0,\quad x''_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0,\quad x_5 \geq 0$
- 2. 非基底変数としてx_1, x_2, x_3を、基底変数としてx_4, x_5を選択すると、前回資料27-28頁より
  - $\mathbf{x}=(0,0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$, 目的関数＝12
  - $\mathbf{c}_B = (1,0)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{c}_N = (2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\left(\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right) = (-1,-2,-1)$

  → 負の要素があるため、最適解ではない

基底変数・非基底変数（前回補足1）

- n変数、制約条件の式の数がmの場合
  - m個の変数$\mathbf{x}_B=(x_1, x_2, ..., x_m)$： 基底変数
  - $(n-m)$個の変数$\mathbf{x}_N=(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_3)$ ：非基底変数
- 基底形式
  - 全ての非基底変数に0を代入するだけで全ての基底変数が決定でき、また、目的関数の値も決定できる表現形式

用語の定義
（前回補足2）

- 実行可能解
  - 制約条件を満たす解
- 基底解
  - $(n\text{-}m)$個の変数を選び、その全てに0を代入し、等式制約条件により他のm個の変数を求めた解
- 実行可能基底解
  - 基底解のうち実行可能である解 ⇔ $x \geqq 0$ である基底解
- 非基底変数：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$
  - ある基底解を定める際に0と置いた変数
- 基底変数：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$
  - 基底解における非基底変数以外の変数
- 最適基底解
  - 基底解のうち、目的関数を最小化（または最大化）する解

シンプレックス法（1）

- 概要
  - 効率的に基底解の中から最適基底解を探索するアルゴリズム
  - 初期の実行可能基底解から始めて、実行可能領域の辺上を目的関数が減少するように隣の実行可能基底解へと移動（基底変数の交換）
  - 非基底変数の中の**一つの非基底変数を0から増加**
  - 残りの非基底変数は0のまま維持

シンプレックス法（2）

- どの変数を基底に入れるか
  - 目的関数を$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N + \alpha$ と書き表したときに、$c'_j < 0$ となるx_jを増加させれば目的関数は減少する。従って、そのようなx_jを基底変数に入れる
- どこまで増やせるか
  - x_j を増加させると元からの基底変数は変化する
  - 全ての基底変数が増加する場合：＿＿＿＿＿＿
  - 減少する基底変数がある場合：＿＿＿＿＿＿＿

シンプレックス法（3） シンプレックスタブロー

- 基底形式の問題を考える

目的関数: $-x_1 - x_2 \to$ 最小化

制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

– ここで、目的関数の値を $z = -x_1 - 2x_2$ とおく

シンプレックス法（4） シンプレックスタブロー

目的関数: $-x_1 - x_2 - z = 0, \quad z \to$ 最小化

制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

これを表で表す

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
$-z$	−1	−1	0	0	−1	0
x_3	3	2	1	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	8

シンプレックス法（5） シンプレックスタブロー

- z列は常に$(-1,0,0)^T$となるので省略

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1	−1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

これをシンプレックスタブローという

0

単位行列の形式

基底変数

元の問題が基底形式で書かれている場合

シンプレックス法(6) シンプレックスタブロー

非基底変数

基底解における目的関数の値×(−1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

基底解における基底変数の値

これを
シンプレックスタブロー
という

シンプレックス法(7) シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

負の値が存在
||
最適解ではない
||
係数が負の非基底変数の内の一つを増加
↓
目的関数が________

- ポイント
  - 最適解ならばz行の係数が全て非負

シンプレックス法(8)
シンプレックスタブローによる最適解の導出

- z行の係数を全て非負にする
- 基底変数と非基底変数を入れ替える

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

x_1かx_2を
基底変数にする
↓
ここではx_2を選択

- ある行の係数全てを定数倍にする
- 二つの行の足し算引き算をする

シンプレックス法（9）

シンプレックスタブローによる最適解の導出

- 入れ替える相手の非基底変数の選択
  - x_1は引き続き非基底変数（$x_1=0$）
  - x_2をいずれかの非基底変数（x_3, x_4）と交換
  - x_2をどこまで増加できるかの条件により交換相手を探索

制約条件 $3x_1+2x_2+x_3=12$

およびx1=0とx3≧0より___________

制約条件 $x_1+2x_2+x_4=8$

およびx1=0とx4≧0より___________

⇨ **実行可能であるための最大値＝________**

⇕

X2と____の基底・非基底を交換

シンプレックス法（10）

シンプレックスタブローによる最適解の導出

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

①z行の係数が負の列を探す

②複数ある場合、その内の一つを選択（ここではx_2）

選択した列を_______________と呼ぶ

シンプレックス法（11）

シンプレックスタブローによる最適解の導出

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3	$\boxed{2}$	1	0	$\boxed{12}$
x_4	1	$\boxed{2}$	0	1	$\boxed{8}$

③選択した変数の解の値を0から増加させる
||
基底変数にする

3．1．どこまで増加可能かを調べる

□及び□より、x_2がmin(12/2, 8/2)まで増加可能

選択した行を_____________と呼ぶ

シンプレックス法（12）
シンプレックスタブローによる最適解の導出

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1	−1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

- 交差点の要素を＿＿＿＿＿＿＿＿と呼ぶ

シンプレックス法（13）
シンプレックスタブローによる最適解の導出

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1	−1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

④ピボット行の全係数をピボット要素で割る
↓
ピボット要素＝＿＿となる

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1	−1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1/2	1	0	1/2	4

シンプレックス法（14）
シンプレックスタブローによる最適解の導出

⑤ピボット列の係数がピボット要素を除いて全て0になるように、各行からピボット行の定数倍を引く

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	−1/2	0	0	1/2	4
x_3	2	0	1	-1	4
x_4	1/2	1	0	1/2	4

④、⑤の要領で基底変数と非基底変数を入れ替える操作を＿＿＿＿＿＿＿＿と呼ぶ

シンプレックス法(15)

(Step 1) 初期基底変数・非基底変数を決定し(次回の講義)、初期基底形式を得る
(Step 2) z行の中で負の値が存在しなければ、現在の基底解が最適解である
(Step 3) 負の値が存在する場合、負の値の列を一つ選ぶ（ピボット列）
(Step 4) ピボット列の中の正の係数を持つ行について、基底解の値を係数で割り、最小の値をとる行を選ぶ（ピボット行）
(Step 5) ピボット操作を行って、ピボット要素以外のピボット列の係数を0にする
(Step 6) Step 2に戻って繰り返す。

シンプレックス法(16) 注意事項

- Step 3で負の値が複数存在するときは、一般に絶対値の大きな列を選ぶと少ない繰り返し回数で収束する。
- 右端の列は、z行以外は常に非負。なぜ？
- ピボット操作を行うと、右上端の値は必ず_______する。つまり、目的関数zの値は必ず_______する。
- ある行のピボット列の係数が負の場合→
  その行を基底に入れると対応する変数が増加→
  非基底変数になれない→
  ピボット列の係数が全て負の場合、その問題は非有界

課題

- 1. 上の例の続きを行い、最適解とその時の目的関数の値を求めよ。
- 2. 同じ例ではじめに x_1 を基底に入れて最適解を求めよ。
- 3. 次の問題をシンプレックス法を用いて解け。

目的関数: $-3x_1 - 2x_2 \to$ 最小化

制約条件: $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

シンプレックス法は、自分でやってみないとわからない！！

シンプレックス法(17)
退化(degenerate)

- あるタブロー

	x_1	x_2	x_3	・・・	
$-z$	負				
x_3	正				0

  - 非基底変数から基底変数に交換する変数として x_1 を選択した場合、ピボット操作で割る値がmin(0/正, …)=0
  - すると、ピボット操作の後の目的関数の値が同一となる
  - これを**退化**しているという。

シンプレックス法(18)
退化(degenerate)

- 退化が連続して発生 →
  基底の入れ替えを行った後、また同じ基底が出現 (循環、巡回という)
- 循環が発生 → 無限に繰り返し、最適解に収束しない
- 循環を防止する方法 →
  Blandの最小添え字規則

シンプレックス法(19)
退化(degenerate)

- Blandの最小添え字規則:
  - ピボット行、ピボット列の候補が複数あるときは、変数の添え字のもっとも小さいものを選択する

  - 循環が生じたとき、上記規則により必ず最適解が求まることが証明されている
  - しかし、この規則に従うと、反復回数が大きくなる副作業が存在
    - 循環状態の発生可能性はきわめて低い

課題

- 4. 次の問題は退化している

目的関数: $-6x_1 - 10x_2 - 3x_3 - z = 0, \quad z \to$ 最小化

制約条件: $4x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0$

$x_2 + x_6 = 1$

$x_i \geq 0, \quad (i = 1,2,\ldots,6)$

ピボット操作を行い、基底およびそのときのzの値がどのように変化するか調べよ