数理論理学 (第19回)

2006.1.31

府川　和彦

第3章. 完全性

以下では, sentence のみを考え, 完全性の証明を行う.

定義3．1．4

（1）T が sentence の集合で, $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$
のとき, T は theory と呼ばれる.

（2）theory T に対して, $T = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$
となる Γ はtheory T の axiom set と呼ばれる. また
Γ の要素は axiom と呼ばれる.

（3）$\exists x\varphi(x)$ となる任意のsentence に対して,
$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \in T$ となる定数 c が存在するならば,
theory T は Henkin theoryという.
また, 定数 c を$\exists x\varphi(x)$ のwitness と呼ぶ.

(注意)　任意の Γ に対して $T=\{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$
とおくと, T は theory となる.

(証明)　$T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$ を示す.

$T \vdash \varphi$ と仮定する. 従って

$$\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_k \vdash \varphi \tag{3-1}$$

ここで, $\sigma_i \in T, 1 \le i \le k$ である. 従って

$$\Gamma \vdash \sigma_i, 1 \le i \le k \tag{3-2}$$

導出(3-1)と(3-2)から新たに

$$\Gamma \vdash \varphi$$

が得られ, T の定義から $\varphi \in T$ となる.

証明終

<u>定義3．1．5</u>　T を language L における theory，T' を language L' における theory とする．

(1)　$T \subseteq T'$ が成立つとき，T' を T の <u>extension</u> という．
(2)　$T' \cap L = T$ が成立つとき（$T' \vdash \psi \quad \Rightarrow T \vdash \psi$ ），
T' を T の <u>conservative extension</u> という．

<u>具体例</u>

language L' を以下のようなアルファベットとする．

命題記号：　p_1, p_2, Λ

結合子：　$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow, \perp$

補助記号：　(,)

language L を，結合子を∧，→，⊥に制限したものとする．また，T' を L' から作られる命題の集合，T を L から作られる命題の集合とする．そうすると，T' は T の conservative extension になる．

<u>**定義3．1．6**</u>　T を language L 上の theory とする．language L' を以下のように定義する．sentence $\exists x\varphi(x)$ に応じ，新たなる定数 c_φ を L に加える．さらに，T^* を axiom set

$$T \cup \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi)\}$$

から得られる theory とする．

補題3．1．7　T^* はT の conservative extension である．

補題3．1．7の証明

（第1段階）　$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$ を新しく加えた axiom とする．

$$\Gamma, \exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \vdash \psi \qquad (3\text{-}3)$$

と仮定する．ここで，ψ は c を含まず，Γ はc を含まない sentence の集合とする．以下では

$$\Gamma \vdash \psi$$

を示す．

(3-3) **に→I を適用すると**

$$\Gamma \vdash (\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)) \to \psi$$

上の導出は y を含まない とすると

$$\Gamma \vdash (\exists x \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi$$

∀I を適用すると

$$\Gamma \vdash \forall y((\exists x \varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi) \qquad (3\text{-}4)$$

$\sigma(y) = \exists x \varphi(x) \to \varphi(y)$ **とする.**

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists y\sigma(y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y(\sigma(y)\to\psi)]^3}{\sigma(y)\to\psi}\,\forall E \qquad [\sigma(y)]^1}{\psi}\,\to E}{\psi}\,\exists E_1}{\exists y\sigma(y)\to\psi}\,\to I_2}{\forall y(\sigma(y)\to\psi)\to(\exists y\sigma(y)\to\psi)}\,\to I_3
$$

従って

$$\vdash\ \forall y(\sigma(y)\to\psi)\to(\exists y\sigma(y)\to\psi)$$

$$\vdash\forall y[(\exists x\varphi(x)\to\varphi(y))\to\psi]\to[\exists y(\exists x\varphi(x)\to\varphi(y))\to\psi]$$

(3-5)

(3-4) と (3-5) から

$$\Gamma \vdash \exists y(\exists x\varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi \qquad (3\text{-}6)$$

が得られる．さらに

$$\Gamma \vdash (\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)) \to \psi \qquad (3\text{-}7)$$

となる．(証明省略)

$$\vdash \exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y) \qquad (3\text{-}8)$$

という関係があるので，(3-7) と (3-8) から

$$\Gamma \vdash \psi$$

が示せた．

(第2段階)

$T^* \vdash \psi \quad \exists \psi \in L$ **とする.**

T^* **は** theory **であるから**

$$\psi \in T^*$$

従って, T^* **の定義から**

$$T \cup \{\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_n\} \vdash \psi \tag{3-9}$$

となる. ここで, σ_i **は**$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$ **という形の** axiom **である.**

T^* **が**T **の** conservative extension **であることは**

$$T^* \vdash \psi \quad \Rightarrow T \vdash \psi$$

と等価なので, $T \vdash \psi$ **を以下で示す.**

(3-9) の n に関する数学的帰納法により

$$T \vdash \psi$$

を証明する.

(i) $n = 1$の場合： 第1段階で証明済み

(ii) $n = k+1$の場合： 数学的帰納法の仮定から

$$T \cup \{\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_k\} \vdash \psi \Rightarrow \quad T \vdash \psi$$

$T \cup \{\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_{k+1}\} \vdash \psi$ と仮定する.

$T' = T \cup \{\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_k\}$ とすると

$$T', \sigma_{k+1} \vdash \psi$$

となり, 第1段階の結果を適用すると

$$T' \vdash \psi$$

が得られ, これは

$$T \cup \{\sigma_1, \Lambda\ , \sigma_k\} \vdash \psi$$

と等価なので, 数学的帰納法の仮定から

$$T \vdash \psi$$

が示せた.

証明終

補題3．1．8

$$T_0 = T, \quad T_{n+1} = (T_n)^*, \quad T_\omega = \bigcup_{n \geq 0} T_n$$

と定義すると，T_ω は Henkin theory であり，T の conservative extension である．

補題3．1．8の証明

(i) T_n がT の conservative extension であることの証明

数学的帰納法で証明する．

(i-i) $n = 0$ の場合

$$T \vdash \psi \quad \Rightarrow T \vdash \psi$$

T_0 はT の conservative extension である．

(i-ii) $n = k+1$ **の場合**

帰納法の仮定から

$$T_k \vdash \psi \quad \Rightarrow T \vdash \psi$$

とする． $T_{k+1} = (T_k)^*$ **であるから，補題3．1．7を適用すると**

$$T_{k+1} \vdash \psi \Rightarrow T_k \vdash \psi$$

従って

$$T_{k+1} \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \psi$$

T_{k+1} **は**T **の** conservative extension **である．**

(ii) T_ω が theory であることの証明

$$T_\omega \vdash \sigma$$

と仮定する. 従って

$$\varphi_0, \Lambda\ , \varphi_n \vdash \sigma \qquad \varphi_0, \Lambda\ , \varphi_n \in T_\omega$$

である. また

$$\forall i \leq n \quad \varphi_i \in T_{m_i} \quad \exists m_i$$

が成立つ.

$$m = \max\{m_i \mid i \leq n\}$$

と定めると, 定義から

$$T_k \subseteq T_{k+1}$$

であるから

$$T_{m_i} \subseteq T_m, \quad \forall i \leq n$$

従って

$$T_m \vdash \sigma$$

T_m は定義から theory であるので

$$\sigma \in T_m \subseteq T_\omega$$

となる.

(iii) T_ω が Henkin theory であることの証明

T_n の language を L_n とし，T_ω の language を L_ω とする.

$$\exists x \varphi(x) \in L_\omega$$

とすると

$$\exists x \varphi(x) \in L_n \quad \exists n$$

となるので, 定義から

$$\exists x \varphi(x) \to \varphi(c) \in T_{n+1}$$

となり,

$$\exists x \varphi(x) \to \varphi(c) \in T_\omega$$

(iv) T_ω がT の conservative extension であることの証明

$$T_n \vdash \sigma$$

とすると $T_n \subseteq T_\omega$ だから

$$T_\omega \vdash \sigma$$

T_n **は**T **の** conservative extension **であるから** ((i)**から**)

$$T \vdash \sigma$$

T_ω **が**T **の** conservative extension **であることが示せた.**

証明終

(注意)

T' **が** T **の** conservative extension **とする.**
T **が無矛盾であれば,** T'**も無矛盾である.**

(証明)

背理法を用いて証明する.
まず, T'**が矛盾していると仮定する. すなわち**

$$T' \vdash \bot$$

T' **は** T **の** conservative extension **であるから**

$$T \vdash \bot$$

T **は無矛盾という前提に反する.**

証明終

<u>補題3．1．11</u>　Γ が無矛盾であるならば，Γ はモデルを持つ．
即ち，∀φ ∈ Γ に対して，

$$\mathbf{u} \models \varphi$$

となる structure **u** が存在する．

<u>補題3．1．11の証明</u>

T を

$$T = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$$

として，Γ から得られる theory とする．明らかに

$$\Gamma \subseteq T$$

となり，T は無矛盾である．
（Tが矛盾しているとすると，Γ も矛盾となり仮定に反する．）

T は無矛盾な Theory であり，T を含む極大無矛盾なTheory T_m が存在する．
（証明は，補題1．5．7「無矛盾な 命題論理式の集合に対して，それを含む極大無矛盾な命題論理式の集合が存在する」と同様．）

従って，

$$\Gamma \subseteq T \subseteq T_m$$

となり，T_mのモデルはΓ のモデルとなる．

何故ならば，∀φ ∈ T_m に対して

$$\mathbf{u} \models \varphi$$

となる structure **u** が存在すれば，∀φ’ ∈ Γ⊆ T_m に対して

$$\mathbf{u} \models \varphi'$$

となる．

T_mに対するモデル，structure **u** を以下に示す．

1． universe A：T_mの language L 上の閉じた term の集合

2．引数の数が k **の関数記号** $\overline{f}$ **に対して，**$\overline{f}$ **の解釈** $\overline{f}^u$ **を**

$$\overline{f}(t_1,\Lambda\ ,t_k)^u = f(t_1,\Lambda\ ,t_k)$$

と定める． $t_1,\Lambda\ ,t_k$ **は閉じた** term **なので，** $f(t_1,\Lambda\ ,t_k)$

も閉じた term **であり，**A **の要素である．**

3．引数の数が p **の述語記号** $\overline{P}$ **に対して，**$\overline{P}$ **の解釈** $v(P)$ **を以下のように定める．**

$$v(P(t_1,\Lambda\ ,t_p)) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad T_m \vdash P(t_1,\Lambda\ ,t_p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，$\forall \varphi \in T_m$ に対して

$$\mathbf{u} \models \varphi$$

となることを，構造的帰納法を用いて証明する．
（∧，→，∀のみを考える）

(i) $\varphi = P(t_1, \Lambda\ t_p)$ の場合

$P(t_1, \Lambda\ t_p) \in T_m$ であるから

$$T_m \vdash P(t_1, \Lambda\ t_p)$$

定義から

$$v(P(t_1, \Lambda\ , t_p)) = 1$$

従って

$$\mathbf{u} \models P(t_1, \Lambda\ , t_p)$$

(ii) $\varphi = \sigma \wedge \tau$ **の場合**

$\sigma \wedge \tau \in T_m$ **であるから**

$$T_m \vdash \sigma \wedge \tau$$

このとき，

$$T_m \vdash \sigma \quad \text{かつ} \quad T_m \vdash \tau$$

T_m**は** Theory **であるから**

$$\sigma \in T_m \quad \text{かつ} \quad \tau \in T_m$$

帰納法の仮定から

$$\mathbf{u} \models \sigma \quad \text{かつ} \quad \mathbf{u} \models \tau$$

補題２．４．５(i) **から**

$$\mathbf{u} \models \sigma \wedge \tau$$

(iii) $\varphi = \sigma \to \tau$ **の場合**

$\sigma \to \tau \in T_m$ **であるから**

$$T_m \vdash \sigma \to \tau$$

このとき,

$$T_m \vdash \sigma \quad \text{ならば} \quad T_m \vdash \tau \tag{3-10}$$

である.

$$\left(\begin{array}{l} T_m \vdash \sigma \to \tau \ \text{と} \ T_m \vdash \sigma \\ \text{に} \to_E \text{を適用すれば明らか} \end{array} \right)$$

(3-10)から

$$\sigma \in T_m \quad \text{ならば} \quad \tau \in T_m$$

となる．このとき帰納法の仮定から

$$\mathbf{u} \models \sigma \quad \text{ならば} \quad \mathbf{u} \models \tau$$

が得られ，補題2．4．5 (iv) から

$$\mathbf{u} \models \sigma \to \tau$$

となる．

(iv) $\varphi = \forall x \psi(x)$ **の場合**

$\forall x \psi(x) \in T_m$ **であるから**

$$T_m \vdash \forall x \psi(x)$$

任意の閉じた t **に対して**

$$T_m \vdash \psi(t)$$

となる． T_m**は** Theory **であるから**

$$\psi(t) \in T_m$$

このとき，帰納法の仮定から

$$\mathbf{u} \models \psi(t)$$

となる．

任意の閉じている term t に対して

$$\mathbf{u} \models \psi(t)$$

であるから，補題２．４．５ (vi) から

$$\mathbf{u} \models \forall x \psi(x)$$

証明終

定理3．1．3　(完全性)

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$$

定理3．1．3の証明

健全性: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ **については補題2．8．2で証明済み.**

$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ **を証明すればよい.**

$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ **は** $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$

と等価なので, 以下ではこれを証明する.

$\Gamma \nvdash \varphi$ と仮定する．

(i) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾．(以下背理法で証明)

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は矛盾しているとすると

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$$

RAA を適用すると

$$\Gamma \vdash \varphi$$

となり，$\Gamma \nvdash \varphi$ に反する．

(ii) 補題3．1．11を $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ に適用すると，
$\forall \psi \in \Gamma$ に対して，

$$\mathbf{u} \models \psi$$

かつ

$$\mathbf{u} \models \neg\varphi$$

となる structure **u** が存在する.

(iii) 従って，あるstructure **u** が存在し，$\forall\psi \in \Gamma$ に対して

$$\mathbf{u} \models \psi \quad \text{かつ} \quad \mathbf{u} \not\models \varphi$$

を満足する（補題2．4．5 (iii) を適用）.

(iv) これは

$$\mathbf{u} \models \Gamma \Rightarrow \mathbf{u} \models \varphi$$

とならないので，定義2．4．4から

$$\Gamma \not\models \varphi$$

である.

証明終