数理論理学 (第17回)

2006.1.24

府川　和彦

2．8　自然演繹 (続き)

ここでは健全性の証明を行う.

(準備)

$\Gamma \vdash \sigma$ とは, 以下のような導出 D が存在することである.

(1) {導出 D の消されずに残った仮定の集合}$\subseteq\Gamma$
(2) 結論が σ

$\mathbf{u} \models \varphi$ の定義

$FV(\varphi) = \{x_1, x_2, \Lambda\}$ とおくとき

$$v(\forall x_1 \forall x_2 \Lambda\ \varphi) = 1$$

<u>定義2．8．1</u> Γ を formula の集合，σ を formula とする．

(1) $\mathbf{u} \models \Gamma$ の定義

$\forall \psi \in \Gamma$ に対して $\mathbf{u} \models \psi$

(2) $\Gamma \models \sigma$ の定義

全ての structure $\mathbf{u}$ に対して

$\mathbf{u} \models \Gamma$ なら $\mathbf{u} \models \sigma$

特に，$\Gamma = \emptyset$ のとき $\models \sigma$ と表す．

<u>補題2．8．2（健全性）</u>

$$\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma \models \sigma$$

（証明）

導出の定義に関して<u>構造的帰納法</u>を適用して証明する．
証明は命題論理の場合とほとんど同じであり，異なる部分についてのみ記述する．

(1) $\forall I$ **について**

$$\begin{array}{c} D \\ \hline \varphi(x) \\ \hline \forall x \varphi(x) \end{array}$$

$\{$**導出** D **の消されずに残った仮定の集合**$\} \subseteq \Gamma$

x **は** Γ **の自由変数でない．**

この導出が存在するとき， $\Gamma \models \forall x \varphi(x)$ **を証明する．**

帰納法の仮定から

$$\Gamma \models \varphi(x)$$

が成立すると仮定する.

今, 全ての structure **u に対して** $\mathbf{u} \models \Gamma$ **を仮定する.**

$\Gamma \models \varphi(x)$ **の定義 (2．8．1) から**

$$\mathbf{u} \models \varphi(x)$$

$\mathbf{u} \models \varphi(x)$ **の定義から** $FV(\varphi) = \{x, x_2, x_3 \Lambda\}$ **とすると**

$$v(\forall x \forall x_2 \Lambda\ \varphi) = 1$$

$$v(\forall x_2 \forall x_3 \Lambda\ \forall x \varphi) = 1$$

従って,

$$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x)$$

これで，$\mathbf{u} \models \Gamma$ なら $\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x)$ が示せた．

従って，定義2．8．1 (2) から

$$\Gamma \models \forall x \varphi(x)$$

が証明できた．

(2) $\forall E$ について

$$\begin{array}{c} D \\ \hline \forall x \varphi(x) \\ \hline \varphi(x) \end{array} \qquad \{\text{導出 } D \text{ の消されずに残った仮定の集合}\} \subseteq \Gamma$$

この導出が存在するとき，$\Gamma \models \varphi(x)$ を証明する．

帰納法の仮定から

$$\Gamma \models \forall x \varphi(x)$$

が成立すると仮定する.

今, 全ての structure **u に対して** $\mathbf{u} \models \Gamma$ **を仮定する.**

$\Gamma \models \forall x \varphi(x)$ **の定義（2．8．1）から**

$$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x)$$

$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x)$ **の定義から** $FV(\forall x \varphi) = \{x_2, x_3 \Lambda\}$**とすると**

$$v(\forall x_2 \forall x_3 \Lambda \ \forall x \varphi) = 1$$

$$v(\forall x \forall x_2 \forall x_3 \Lambda \ \varphi) = 1$$

従って,

$$\mathbf{u} \models \varphi(x)$$

これで，$\mathbf{u} \models \Gamma$ なら　$\mathbf{u} \models \varphi(x)$　が示せた．

従って，定義２．８．１(2) から

$$\Gamma \models \varphi(x)$$

が証明できた．

2．9　∃に関する導出規則

定理2．5．1(iv)

$$\models \exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

を用いて，∃に関する導出規則を導入する．

<u>補題2．9．1</u>

(i)　$\varphi(t) \vdash \exists x\varphi(x)$

但し，φ の中の x **に** t **を代入したとき，** t **中の自由変数が束縛されない．**

(ii)　$\Gamma, \varphi(x) \vdash \psi \Rightarrow \Gamma, \exists x\varphi(x) \vdash \psi$

ただし， x **は** Γ **および** ψ **の自由変数でない．**

(i) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \neg \varphi(x)]^1}{\neg \varphi(t)}\,\forall E \qquad \varphi(t)}{\bot}\,\to E}{\neg \forall x \neg \varphi(x)}\,\to I_1$$

従って

$$\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x)$$

(ii) の証明

φ(x) が消されているので
x は自由変数として現れていない.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi(x)]^1}{D}}{\psi} \quad [\neg\psi]^2}{\bot}\,\to I_1}{\neg\varphi(x)}\,\forall I}{\forall x\neg\varphi(x)} \quad \neg\forall x\neg\varphi(x)\,\to E
$$

$$
\dfrac{\bot}{\psi}\,RAA_2
$$

従って

$$\Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \psi$$

∃に関する導出規則

$$\exists I \quad \frac{\varphi(t)}{\exists x\varphi(x)} \qquad\qquad \exists E \quad \frac{\exists x\varphi \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathrm{M}\\ \psi\end{array}}{\psi}$$

導出の例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x)\to\psi)]^3}{\varphi(x)\to\psi}\,\forall E \qquad [\varphi(x)]^1}{\psi}\,\to E}{\psi}\,\exists E_1}{\exists x\varphi(x)\to\psi}\,\to I_2}{\forall x(\varphi(x)\to\psi)\to(\exists x\varphi(x)\to\psi)}\,\to I_3$$

2．11　スコーレム化

$\forall x \exists y \varphi(x, y)$ を閉じた formula とする．さらに，$\forall x \exists y \varphi(x, y)$ は充足可能であるとする．すなわち

$$v(\forall x \exists y \varphi(x, y)) = 1$$

となる structure **u** が存在する．

このとき，f を $\varphi(x, y)$ に現れない新しい関数記号とすると，formula $\forall x \varphi(x, f(x))$ も充足可能となる．

<u>補題2．11．1</u>　$\forall x \exists y \varphi(x, y)$ が充足可能ならば，$\forall x \varphi(x, f(x))$ も充足可能である．

補題2．11．1の証明

$$v(\forall x \varphi(x, f(x))) = 1$$

となる structure **u'** を構成すればよい．

まず，**u** は以下を満足する structure とする．

$$v(\forall x \exists y \varphi(x, y)) = 1$$

u の universe A をそのまま，**u'** の universe とする．

また，**u'** は **u** における各種記号の解釈をそのまま受け継ぐものとする．

さて，**u** の下では，任意の x に対して $\varphi(x, y)$ を真にする y が存在する．従って，x に $\varphi(x, y)$ を真にする y を対応させる関数を関数記号 f の解釈とすれば，$\forall x \varphi(x, f(x))$ を真とする structure **u'** を作ることができる．

<u>補題2．11．2</u>　$\forall x\varphi(x, f(x))$ **が充足可能ならば，**
$\forall x\exists y\varphi(x, y)$ **も充足可能である．**

<u>証明</u>

$\forall x\varphi(x, f(x))$ **が充足可能なので，ある** structure **u に対して**

$$v(\forall x\varphi(x, f(x))) = 1$$

このとき，このstructure **u に対して**

$$v(\forall x\exists y\varphi(x, y)) = 1$$

となる．従って$\forall x\exists y\varphi(x, y)$ **も充足可能である．**

一般的には，以下の定理が成立する．

定理2．11．3

$$\forall x_1 \Lambda \ \forall x_n \exists y \varphi(x_1, \Lambda \ , x_n, y)$$

が充足可能であることと，

$$\forall x_1 \Lambda \ \forall x_n \varphi(x_1, \Lambda \ , x_n, f(x_1, \Lambda \ , x_n))$$

が充足可能であることとは等価である．ここで f は引数 n の新しい関数記号である．

以上のような文脈で用いられる関数記号 f のことを，スコーレム関数という．

$n = 0$ の場合は，$\exists y \varphi(y)$ という formula が充足可能であることと $\varphi(c)$ という formula が充足可能であることとが等価になる．このとき c は新しい定数記号で，スコーレム定数と呼ばれる．

演習問題17

以下を導出せよ.

(i) $\vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x \varphi(x) \to \psi) \quad \text{if} \quad x \notin FV(\psi)$

(ii) $\vdash \exists x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \exists x \psi(x)) \quad \text{if} \quad x \notin FV(\varphi)$