数理論理学 (第16回)

2006.1.17

府川　和彦

2．5　述語論理の簡単な性質

<u>定理2．5．1</u>：　ドモルガンの法則の一般化

(i) $\models \neg(\forall x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\neg\varphi)$

(ii) $\models \neg(\exists x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi)$

(iii) $\models \forall x\varphi \leftrightarrow \neg(\exists x\neg\varphi)$

(iv) $\models \exists x\varphi \leftrightarrow \neg(\forall x\neg\varphi)$

(∗)　∀ は ∧ の一般化, ∃ は ∨ の一般化であることに注意

<u>定理2．5．1 (i) の証明</u>

$FV(\forall x\varphi)=\{z_1,\Lambda\ ,z_k\}$ **とする.**

$\models \neg(\forall x\varphi)\leftrightarrow\exists x(\neg\varphi)$ **の定義は, 任意の** structure **u に対して**

$$\mathbf{u}\models\forall z_1\Lambda\ \forall z_k(\neg\forall x\varphi(x,z_1,\Lambda\ ,z_k)\leftrightarrow\exists x\neg\varphi(x,z_1,\Lambda\ ,z_k))$$

である. 従って, 任意の $a_1,\Lambda\ ,a_k$ **に対して**

$$\mathbf{u}\models\neg\forall x\varphi(x,a_1,\Lambda\ ,a_k)\leftrightarrow\exists x\neg\varphi(x,a_1,\Lambda\ ,a_k)$$

を示す.

$$\mathbf{u} \models \neg\forall x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Updownarrow \qquad \textbf{補題2．4．5} \text{ (iii)}$$

$$\mathbf{u} \not\models \forall x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \qquad \text{not for all } b$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \neg\varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \qquad \text{for some } b$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \exists x\neg\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

補題2．4．5 (v)**から証明終**

<u>定理２．５．１ (ii) の証明</u>

$FV(\forall x\varphi) = \{z_1, \Lambda\ , z_k\}$ **とする.**

$\models \neg(\exists x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi)$ **の定義は, 任意の** structure **u に対して**

$$\mathbf{u} \models \forall z_1 \Lambda\ \forall z_k(\neg\exists x\varphi(x, z_1, \Lambda\ , z_k) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x, z_1, \Lambda\ , z_k))$$

である. 従って, 任意の $a_1, \Lambda\ , a_k$ **に対して**

$$\mathbf{u} \models \neg\exists x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

を示す.

$$\mathbf{u} \models \neg\exists x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Updownarrow$$

補題２．４．５ (iii)

$$\mathbf{u} \not\models \exists x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k)$$ not for some b

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \neg\varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k)$$ for all b

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \forall x\neg\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

補題２．４．５ (v)**から証明終**

定理2．5．1 (iii) **と** (iv) **の証明は演習問題**

<u>定理2．5．3</u>

(i) $\models \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

(ii) $\models \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

(iii) $\models \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \vee \psi$ if $x \notin FV(\psi)$

(iv) $\models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \wedge \psi$ if $x \notin FV(\psi)$

定理2．5．3 (i) の証明

$FV(\forall x(\varphi \wedge \psi)) = \{z_1, \Lambda\ , z_k\}$ とする.

証明すべきことは, 任意の structure $\mathbf{u}$ と任意の $a_1, \Lambda\ , a_k$ に対して

$$\mathbf{u} \models \forall x(\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \wedge \psi(x, a_1, \Lambda\ , a_k))$$
$$\leftrightarrow \forall x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \wedge \forall x\psi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

を示すことである.

$$\mathbf{u} \models \forall x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \wedge \forall x\psi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$\updownarrow$ 補題2．4．5 (i)

$$\mathbf{u} \models \forall x\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \text{ and } \mathbf{u} \models \forall x\psi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \quad \text{for all } b$$

and

$$\mathbf{u} \models \psi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \quad \text{for all } b$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \wedge \psi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \quad \text{for all } b$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{u} \models \forall x(\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \wedge \psi(x, a_1, \Lambda\ , a_k))$$

証明終

<u>定理２．５．３ (iii) の証明</u>

$FV(\forall x(\varphi(x) \vee \psi)) = \{z_1, \Lambda\ , z_k\}$ **とする.**

(iii) **の定義は, 任意の** structure **u に対して**

$$\mathbf{u} \models \forall z_1 \Lambda\ \forall z_k (\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi(x) \vee \psi)$$

である. 従って, 任意の $a_1, \Lambda\ , a_k$ **に対して**

$$\mathbf{u} \models \forall x[\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$$

を示す.

$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ **を仮定**

$\Updownarrow$ **補題2．4．5** (ii)

$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$

or

$\mathbf{u} \models \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$

$\Updownarrow$

$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k)$ for all b

or

$\mathbf{u} \models \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$

(i) $\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k)$ for all b **のとき**

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k) \text{ for all } b$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{u} \models \forall x[\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$$

(ii) $\mathbf{u} \models \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ **のとき**

$$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k) \text{ for all } b$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{u} \models \forall x[\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$$

従って

$$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \models \forall x[\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)] \qquad (1)$$

が証明された.

逆に

$\mathbf{u} \models \forall x[\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$ **を仮定.**

$\updownarrow$

$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ for all b

$\mathbf{u} \models \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ **のとき**

$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ **が成立する.**

$\mathbf{u} \not\models \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$ **のとき**

$\mathbf{u} \models \varphi(b, a_1, \Lambda\ , a_k)$ for all b

$\updownarrow$

$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k)$

よって, 同様に

$$\mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$$

が成立する.

従って

$$\mathbf{u} \models \forall x [\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k) \qquad (2)$$

が証明された.

(1) と (2) から

$$\mathbf{u} \models \forall x [\varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)]$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u} \models \forall x \varphi(x, a_1, \Lambda\ , a_k) \vee \psi(a_1, \Lambda\ , a_k)$$

証明終

定理2．5．3 (ii) **と** (iv) **については**
それぞれ, (i) **と** (iii) **と同様に証明できる (演習問題) .**

2．8　自然演繹

まず, 結合子は, ∧, →, ⊥, ∀を仮定.

(1) **→, ⊥は完全である.**
(2) **定理2．5．1** (iv) **から** $\exists x\varphi$ **は** $\neg\forall x\neg\varphi$
と等価である.

命題論理における自然演繹の導出規則に, 以下の規則を追加.

$$\forall I \quad \frac{\varphi(x)}{\forall x \varphi(x)} \qquad\qquad \forall E \quad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)}$$

ただし，以下の制約がある．

(I) **<u>$\forall I$ の制約</u>：消されていない仮定において，**
x **が自由変数であってはならない．**

良くない例

x **は自由変数**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x=0]}{\forall x(x=0)}\,\forall I}{(x=0)\to\forall x(x=0)}\,\to I}{\forall x((x=0)\to\forall x(x=0))}\,\forall I}{(0=0)\to\forall x(x=0)}\,\forall E$$

$$\begin{array}{c}\psi(x)\\ D\\ \varphi(x)\end{array}$$

x を自由変数とすると，この導出は

$$\forall x(\psi(x) \to \varphi(x))$$

x は任意ではなく，条件がつくであり，結論は $\forall x\varphi(x)$ ではない．

<u>(II) $\forall E$ の制約</u>： φ の中の x に t を代入したとき，t 中の自由変数が束縛されてはならない．

良くない例

$x = y$ とすると y が拘束される

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x \neg \forall y(x = y)]}{\neg \forall y(y = y)}\,\forall E}{\forall x \neg \forall y(x = y) \to \neg \forall y(y = y)}\,\to I$$

導出の例

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))]^1}{\varphi(x)\wedge\psi(x)}\,\forall E}{\varphi(x)}\,\wedge E}{\forall x\varphi(x)}\,\forall I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))]^1}{\varphi(x)\wedge\psi(x)}\,\forall E}{\psi(x)}\,\wedge E}{\forall x\psi(x)}\,\forall I}{\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)}\,\wedge I}{\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\to\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)}\,\to I_1
$$

演習問題16

(1) **定理2．5．1** (iii) **と** (iv) **を証明せよ．**

(2) **定理2．5．3** (ii) **と** (iv) **を証明せよ．**