数理論理学 (第15回)

2006.1.10

府川　和彦

2．4　述語論理の解釈

similarity type $(2;2,1;1)$

に対するアルファベット L **は**

1．述語記号： $P_1(x_1, x_2), \doteq$

2．関数記号： $f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1)$

3．定数記号： c_1

4．変数記号，結合子，補助記号

となる．ここで，この similarity type **を持つ構造** (structure) **u**

$$\mathbf{u} = (Z, <, +, -, 0)$$

を考える．なお， Z **は整数の集合である．**

この構造 (structure) **u において，各記号は**

$$P_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x_1 < x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1) = -x_1$$

$$c_1 = 0$$

という意味を持つ．

次に，構造 (structure) **uのアルファベット** L **を拡張した** $L(\mathbf{u})$ **を**

$$L(\mathbf{u}) = L \cup \{\overline{m} \mid m \in Z\}$$

m **に対する<u>定数記号</u>**

と定める（定数記号 $\overline{m}$ **を加える）．**

$L(\mathbf{u})$ に関して，
閉じている term t の<u>解釈</u> t^u は，Z の要素を対応させることであり，
以下のように定める．

t	t^u
$\overline{m}$	m
$f_1(t_1, t_2)$	$t_1{}^u + t_2{}^u$
$f_2(t_1)$	$-t_1{}^u$

例1． $f_1\left(f_1(\overline{2}, \overline{3}), f_2(\overline{7})\right)^u = f_1(\overline{2}, \overline{3})^u + f_2(\overline{7})^u$

$$= \overline{2}^u + \overline{3}^u + (-\overline{7}^u)$$

$$= 2 + 3 - 7 = -2$$

$L(\mathbf{u})$ **に関して，**
sentence (**閉じている** formula) φ **の<u>解釈</u>** $v(\varphi)$ **は真理値0，1を対応させることである．命題論理と同様に以下のように定める．**

$$v(\bot) = 0$$

$$v(t \doteq s) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t^u = s^u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$v(P_1(t,s)) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t^u < s^u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} v(\varphi \Box \psi) \\ v(\neg \varphi) \end{array}\right\} \quad \text{命題論理と同様}$$

$$v(\forall x\varphi) = \min\{v(\varphi[\overline{n}/x]) \mid n \in Z\}$$

$$v(\exists x\varphi) = \max\{v(\varphi[\overline{n}/x]) \mid n \in Z\}$$

(注意)

$$v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$$

$$v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$$

であるから，∀とヨはそれぞれ，∧と∨の一般化とみなすことができる．

例2．1　$v(\overline{2} \overset{\bullet}{=} \overline{-1}) = 0$

$2 \neq -1$ **であるから明らか**

例2．2 $v((\overline{0} \overset{\bullet}{=} \overline{-1}) \to P_1(\overline{25}, \overline{10}))$

$0 \neq -1$ **だから** $v((\overline{0} \overset{\bullet}{=} \overline{-1})) = 0$

$25 > 10$ **だから** $v(P_1(\overline{25}, \overline{10})) = 0$ **従って**

$v((\overline{0} \overset{\bullet}{=} \overline{-1}) \to P_1(\overline{25}, \overline{10})) = v(0 \to 0) = 1$

例2．3 $v(\forall x \exists y P_1(x, y)) = \min_n \max_m v(P_1(\overline{n}, \overline{m}))$

$v(P_1(\overline{n}, \overline{m})) = 1 \quad \text{if} \quad n < m$ **であるから**

n **を固定して考えると，任意の** n **に対して**

$\forall n, \max_m v(P_1(\overline{n}, \overline{m})) = 1$

従って

$$v(\forall x \exists y P_1(x, y)) = \min_n \max_m v(P_1(\overline{n}, \overline{m})) = 1$$

次に, <u>解釈の一般的な定義</u>を示す.

similarity type が $(r_1, \Lambda\ , r_n; a_1, \Lambda\ , a_m; k)$ と与えられたとき

このsimilarity typeを持つ構造 (structure) **u**

$$\mathbf{u} = (A, P_1, \Lambda\ P_n, F_1, \Lambda\ F_m, \{c_i\})$$

を考える. 対応する述語記号と関数記号をそれぞれ

$$\overline{P_1}, \Lambda\ \overline{P_n} \qquad \overline{F}_1, \Lambda\ \overline{F}_m$$

と定め,

構造 (structure) **uのアルファベット** L **を拡張した** $L(\mathbf{u})$ **を**

$$L(\mathbf{u}) = L \cup \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

と定める（定数記号として， $\overline{a}$ **を加える）．**

<u>定義2．4．1</u>　$L(\mathbf{u})$ **上の閉じている** term t **の解釈は，以下の条件を満足する写像** $()^u : TERM_c \rightarrow A$ **である．**

(i)
$$\overline{c_i}^u = c_i$$

$$\overline{a}^u = a$$

(ii)
$$\overline{F}_i(t_1, \Lambda\ , t_p)^u = F_i(t_1{}^u, \Lambda\ , t_p{}^u) \quad \text{where} \quad p = a_i$$

<u>定義２．４．２</u>　$L(\mathbf{u})$ **上の閉じている** formula (sentence) φ **の解釈は，以下の条件を満足する写像** $v() : SENT \rightarrow \{0, 1\}$ **である．**

(i)
$$v(\bot) := 0$$
$$v(\overline{P}) := P \quad (\text{i.e.} \quad 0 \text{ or } 1)$$

(ii)
$$v(\overline{P}_i(t_1, \Lambda\ t_p)) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \left\langle t_1^{\ u}, \Lambda\ t_p^{\ u} \right\rangle \in P_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$v(t_1 \doteq t_2) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t_1^{\ u} = t_2^{\ u} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii)
$$v(\varphi \wedge \psi) := \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$$
$$v(\varphi \vee \psi) := \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$$

$$v(\varphi \to \psi) := \max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\}$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) := 1 - |v(\varphi) - v(\psi)|$$

$$v(\neg\varphi) := 1 - v(\varphi)$$

(iv) $$v(\forall x\varphi) := \min\{v(\varphi[\overline{a}/x]) \mid a \in A\}$$

$$v(\exists x\varphi) := \max\{v(\varphi[\overline{a}/x]) \mid a \in A\}$$

$v(\varphi) = 1$ **のとき** $\mathbf{u} \models \varphi$ **と書く.**

<u>閉じていない</u> <u>formula</u> **に対して，** $\models$ **は以下のように定義する．**

<u>定義２．４．３</u> $FV(\varphi) = \{z_1, \Lambda\ , z_k\}$ **のとき**

$$Cl(\varphi) := \forall z_1 \Lambda\ \forall z_k \varphi$$

と定める．これは φ **の** universal closure **と呼ばれる．**

<u>定義２．４．４</u>

(i) $\mathbf{u} \models Cl(\varphi)$ **のときのみ，** $\mathbf{u} \models \varphi$

(ii) **対象とする**similarity type **を有する全ての構造** (structure) **u に対して，** $\mathbf{u} \models Cl(\varphi)$ **のとき**

$$\models \varphi$$

と書く．

(iv) **u** $\models \varphi$ **のとき u は** φ **のモデルという．**

(v) $\models \varphi$ **のとき** φ **は恒真（トートロジー）という．**

(vi) $FV(\varphi) = \{z_1, \Lambda\ , z_k\}$ **とする．**

u $\models \exists z_1 \Lambda\ \exists z_k \varphi$ **のときのみ，**φ **はu で充足可能という．**

また単に，φ **は充足可能ともいう．**

<u>補題2．4．5</u> sentence **に対して以下が成立つ．**

(i) $\mathbf{u} \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathbf{u} \models \varphi$ and $\mathbf{u} \models \psi$

(ii) $\mathbf{u} \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathbf{u} \models \varphi$ or $\mathbf{u} \models \psi$

(iii) $\mathbf{u} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathbf{u} \not\models \varphi$

(iv) $\mathbf{u} \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\mathbf{u} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{u} \models \psi)$

(v) $\mathbf{u} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\mathbf{u} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{u} \models \psi)$

(vi) $\mathbf{u} \models \forall x\varphi \Leftrightarrow \mathbf{u} \models \varphi[\overline{a}/x]$ for $\forall a \in A$

(vii) $\mathbf{u} \models \exists x\varphi \Leftrightarrow \mathbf{u} \models \varphi[\overline{a}/x]$ for $\exists a \in A$

補題2．4．5の証明

(iv) の証明

$\mathbf{u} \models \varphi \to \psi$ を仮定する．このとき

定義2．4．2から

$$v(\varphi \to \psi) = \max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\} = 1$$

であるから $\mathbf{u} \models \varphi$ 即ち $v(\varphi) = 1$ のとき

$$v(\psi) = 1$$

となる．従って

$$\mathbf{u} \models \varphi \to \psi \Rightarrow (\mathbf{u} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{u} \models \psi)$$

が証明された．

逆に $\mathbf{u} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{u} \models \psi$ を仮定する.

$\mathbf{u} \not\models \varphi \to \psi$ を仮定する (背理法) .

このとき

$$v(\varphi \to \psi) = \max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\} = 0$$

従って

$$v(\varphi) = 1 \quad v(\psi) = 0$$

となり, $\mathbf{u} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{u} \models \psi$ と矛盾する. 従って

$$\mathbf{u} \models \varphi \to \psi$$

となり

$(\mathbf{u} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{u} \models \psi) \Rightarrow \mathbf{u} \models \varphi \to \psi$ が証明された.

(vii) **の証明**

u $\models \exists x\varphi$ **は定義2．4．2から**

$$v(\exists x\varphi) = \max\{v(\varphi[\overline{a}/x]) \mid a \in A\} = 1$$

と等価である．これはまた

$$v(\varphi[\overline{a}/x]) = 1 \quad \exists a \in A$$

と等価である．従って **u** $\models \exists x\varphi$ **は**

$$\mathbf{u} \models \varphi[\overline{a}/x] \quad \text{for} \quad \exists a \in A$$

と等価となる．

演習問題１５

補題２．４．５の(i) , (ii), (iii) , (v) と (vi) を証明せよ.