数理論理学 (第11回)

2005.11.22

府川　和彦

1．6　導出規則 (II)

ここでは，∨と $\leftrightarrow$ を含む導出を考える．

まず，∨と $\leftrightarrow$ を∧，→，¬で表す．

<u>定義1．6．1</u>

$$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\neg\varphi := \varphi \rightarrow \bot$$

補題1．6．2

(i) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi \qquad \psi \vdash \varphi \vee \psi$

(ii) $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ and $\Gamma, \psi \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$

(iii) $\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$

(iv) $\Gamma, \varphi \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

(v) $\varphi \leftrightarrow \psi, \varphi \vdash \psi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi, \psi \vdash \varphi$

(vi) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ and $\Gamma, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

補題1．6．2 (i) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^1}{\neg\varphi}\wedge E}{\bot}\to E}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\to I_1$$

よって

$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$

が示せた．

$$\dfrac{\dfrac{\psi \qquad \dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^1}{\neg\psi}\wedge E}{\bot}\to E}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\to I_1$$

よって

$\psi \vdash \varphi \vee \psi$

が示せた．

補題1．6．2 (ii) の証明

$\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ を $\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ D_1\end{matrix}}{\sigma}$　　$\Gamma, \psi \vdash \sigma$ を $\dfrac{\begin{matrix}\psi \\ D_2\end{matrix}}{\sigma}$ と表す．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^1 \\ D_1\end{matrix} \quad [\neg\sigma]^3}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_1 \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\psi]^2 \\ D_2\end{matrix} \quad [\neg\sigma]^3}{\bot}\to E}{\neg\psi}\to I_2}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}\wedge I \quad \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)}{\bot}\to E}{\sigma}\,\mathrm{RAA}_3
$$

(iii) **は自明**
(iv)〜(vi) **は演習問題**

新しい導出規則

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathrm{M} \\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi] \\ \mathrm{M} \\ \sigma\end{array}}{\sigma} \vee E$$

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot} \neg E \qquad \frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathrm{M} \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \neg I$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[\varphi] & [\psi] \\ \mathrm{M} & \mathrm{M}\end{array}}{\psi \qquad \varphi}\leftrightarrow I$$

$$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \qquad \dfrac{\psi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\leftrightarrow E$$

(*) **ここで重要なものは**$\vee I$ **と**$\vee E$ **の規則である.**

例 $(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \vdash (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma)$

$$\dfrac{\begin{array}{c}(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \\ D_1 \\ \varphi \vee \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \\ D_2 \\ \psi \vee \sigma\end{array}}{(\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma)} \wedge I$$

導出D_1の部分

$$\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi} \wedge E}{\varphi \vee \sigma} \vee I \qquad \dfrac{[\sigma]^1}{\varphi \vee \sigma} \vee I}{\varphi \vee \sigma} \vee E_1$$

導出D_2の部分

$$\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^2}{\psi}\wedge E}{\psi \vee \sigma}\vee I \qquad \dfrac{[\sigma]^2}{\psi \vee \sigma}\vee I}{\psi \vee \sigma}\vee E_2$$

「中間試験の範囲はここまで」

第2章. 述語論理

第1章で述べた<u>命題論理</u>では, 数学的な記述を十分にできない場合がある.

例えば　「全ての平方数は正である. 9は平方数である.
従って9は正である.」

この論理を命題論理の観点で表すと　$\varphi \wedge \psi \to \sigma$

これでは論理が正しいのかわからない.

<u>対象 (対象の構造)</u> と<u>関係</u>を記述するように拡張する必要がある.

⇒ <u>述語論理</u>

2．1　限量子

$\exists x P(x)$　：性質 P を有する x が存在する．

$\forall x P(x)$　：全ての x は性質 P を有する．

具体例

$\forall x \exists y (x = 2y)$　：全ての x に対して $x = 2y$ となる y が存在する．

2．2　構造

2．2．1　直積, 関数, 関係

A を集合とする. このとき

$$A^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A, x_2 \in A\}$$

$$A^n = \{(x_1, \Lambda\ , x_n) \mid x_1 \in A, \Lambda\ , x_n \in A\}$$

これらを A の直積という.

A の直積の部分集合をA 上の関係という.

$R \subseteq A^2$　のとき, R は2項関係

$R \subseteq A^n$　のとき, R は n 項関係　$(n \geq 1)$

n 項関係 R に対して $(R \subseteq A^n)$

$$P(x_1, \Lambda\ x_n) = \begin{cases} 1 & if \quad (x_1, \Lambda\ x_n) \in R \\ 0 & if \quad (x_1, \Lambda\ x_n) \notin R \end{cases}$$

となる述語 P が決まる．n 項関係 R とそれに対応する述語 P は同一視される．

<u>具体例</u>： N を自然数の集合とする．このとき，$<$ は N 上の2項関係 R を与える．

$$R = \{(n, m) \mid n < m\}$$

または

$$P(n,m)=\begin{cases}1 & if \quad n<m \\ 0 & if \quad n\geq m\end{cases}$$

となる述語 P が決まる.

<u>定義２．２．１</u>　以下の組を構造という.

$$(A, R_1, \Lambda\ R_n, F_1, \Lambda\ F_m, \{c_i\})$$

A　：集合

$R_i \subseteq A^{r_i}$　：関係

$F_j : A^{a_j} \to A$　：関数 (写像)

c_i　：定数記号

具体例　$(N,<)$ ：**自然数の順序集合**

自然数の集合　　**大小関係**

<u>定義2．2．2</u>　構造に対して，以下の組を similarity type **と呼ぶ．**

$$(r_1,\Lambda\ ,r_n;a_1,\Lambda\ ,a_m;k)$$

ただし，　$k=|\{c_i\}|$　**(定数記号の数)**

具体例　**自然数の順序集合** $(N,<)$ **の** similarity type

$(2;-;0)$　　**ただし，ーは関数がないことを示す．**

演習問題11

(11－1)　補題1．6．2の (iv)から(vi)を証明せよ．
ただし，1．6節で新たに導入した導出規則を用いてはならない．

(11－2)　以下を導出規則を用いて証明せよ．

$$\vdash \varphi \vee \neg \varphi$$