数理論理学 (第9回)

2005.11.15

府川　和彦

1．5　完全性の続き

ここでは $\models$ と $\vdash$ が等価であること，即ち<u>完全性</u>の証明の続きを行う．

<u>定義1．5．6　(極大無矛盾)</u>

Γ は以下の条件を満足するときに限り，<u>極大無矛盾</u>という．

(a) Γ は無矛盾．
(b) $\Gamma \subset \Gamma'$ ならば，Γ' は矛盾している．

<u>補題1．5．7</u>

任意の無矛盾な Γ に対して，$\Gamma \subseteq \Gamma^*$ となる極大無矛盾な Γ^* が存在する．

補題1．5．7の証明

全ての命題（論理式）に番号を付け，$\varphi_0, \varphi_1, \Lambda$ とする．

また，命題（論理式）の集合 Γ_i と Γ^* を以下のように定める．

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ が無矛盾のとき} \\ \Gamma_n & \text{その他} \end{cases}$$

$$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$$

明らかに $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Lambda \subseteq \Gamma_{n+1} \subseteq \Lambda \subseteq \Gamma^*$ である．

(a) 定義から任意の n に対して Γ_n は無矛盾である．

(b) Γ^* が無矛盾であることを，背理法を用いて証明する．

$\Gamma^* \vdash \perp$ と仮定する（Γ^* が矛盾していると仮定する）．

この導出 D の消されない仮定を $\psi_0, \psi_1, \Lambda\ \psi_k$ とする．

$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ であるから

$$\forall \psi_i \in \exists \Gamma_{n_i} \quad (i \le k)$$

ここで n を以下のように定める．

$$n = \max\{n_i \mid 0 \le i \le k\}$$

明らかに

$$\psi_0, \psi_1, \Lambda\ \psi_k \in \Gamma_n$$

従って

$$\Gamma_n \vdash \bot$$

となり，Γ_n は矛盾している．これは矛盾なのでΓ^* は無矛盾である．

(c) Γ^* が極大無矛盾であることを示す．

$\Gamma^* \subseteq \Delta$ かつΔ が無矛盾と仮定する．

まず，$\psi \in \Delta$ とする．$\varphi_m = \psi$ となる m が存在する．

この m に対して

$$\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$$

であるから

$$\Gamma_m \cup \{\varphi_m\} \subseteq \Delta$$

Δ は無矛盾であるから $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ も無矛盾である.

従って

$$\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$$

よって

$$\varphi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$$

$\varphi_m (= \psi) \in \Delta$ のとき $\varphi_m \in \Gamma^*$ であるから $\Gamma^* \supseteq \Delta$

仮定から $\Gamma^* \subseteq \Delta$ であるので, 結局

$$\Gamma^* = \Delta$$

となり, Γ^* は極大無矛盾となる.

証明終

補題1．5．8

Γ は極大無矛盾とすると, $\Gamma \vdash \varphi$ ならば $\varphi \in \Gamma$

補題1．5．8の証明(背理法で証明)

$\Gamma \vdash \varphi$ で $\varphi \notin \Gamma$ と仮定する.

Γ は極大無矛盾であるから, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ は矛盾している.

従って, 補題1．5．5 (b) から

$$\Gamma \vdash \neg\varphi$$

この結果と $\Gamma \vdash \varphi$ からΓ は矛盾していることになる.

これは矛盾である. 従って

$$\varphi \in \Gamma$$

証明終

補題1．5．9

Γ は極大無矛盾とすると

(a) 全ての命題（論理式）φ に対して φ ∈Γ か $\neg\varphi \in \Gamma$

(b) 全ての命題（論理式）φ と ψ 対して

$$\varphi \to \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$$

補題1．5．9 (a) の証明

$\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$ を考える．Γ’ が矛盾しているとき補題1．5．5から

$$\Gamma \vdash \neg\varphi$$

補題1．5．8から

$$\neg\varphi \in \Gamma$$

Γ’ が無矛盾のとき，Γが極大無矛盾であるので

$$\Gamma' = \Gamma \longrightarrow \varphi \in \Gamma$$

証明終

補題1．5．9 (b) の証明

$\varphi \to \psi \in \Gamma$ と $\varphi \in \Gamma$ を仮定する．明らかに

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi$$

従って，導出規則 $\to E$ を用いると

$$\Gamma \vdash \psi$$

よって補題1．5．8から $\psi \in \Gamma$ が得られ

$$\varphi \to \psi \in \Gamma \Rightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma) \qquad (*1)$$

が証明された．

次に $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$ を仮定する．

(i) $\varphi \in \Gamma$ のとき

$\psi \in \Gamma$ であり $\Gamma \vdash \psi$ 従って $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

よって補題1．5．8から

$$\varphi \to \psi \in \Gamma$$

(ii) $\varphi \notin \Gamma$ のとき

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ は矛盾している．補題1．5．5から

$$\Gamma \vdash \neg\varphi$$

この導出を $\begin{array}{c} D \\ \neg\varphi \end{array}$ と表す．なお，この導出において消されずに残った仮定は Γ に含まれる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D}{\neg\varphi} \quad [\varphi]^1}{\bot}\to E}{\psi}\bot}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

左の新しい導出は

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

である．

よって補題1．5．8から

$$\varphi \to \psi \in \Gamma$$

結局

$$(\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma) \Rightarrow \varphi \to \psi \in \Gamma \qquad (*2)$$

が証明された. (*1) と (*2) から

$$\varphi \to \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$$

証明終

補題1．5．11

Γ が無矛盾とすると，$\forall\psi \in \Gamma$ に対して $v(\psi)=1$ となる付値 v が存在する．(補題1．5．4の逆)

補題1．5．11の証明

(a) Γ は補題1．5．7から極大無矛盾 Γ^* に含まれる．
(b) 付値 v を以下のように定義する．

$$v(p_i)=\begin{cases}1 & \text{if } p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

原子論理式

このとき，$\varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow v(\varphi)=1$ となることを構造的帰納法を用いて証明する．

(1) φ が原子論理式の場合，定義より題意を満足する．

(2) φ = ψ ∧ σ のとき

ψ ∧ σ ∈Γ* とすると明らかに $\Gamma^* \vdash \psi \wedge \sigma$

従って，導出規則∧Eを用いると

$$\Gamma^* \vdash \psi \qquad \Gamma^* \vdash \sigma$$

補題１．５．８から

$$\psi \in \Gamma^* \qquad \sigma \in \Gamma^*$$

帰納法の仮定から

$$v(\psi) = 1 \qquad v(\sigma) = 1$$

従って

$$v(\psi \wedge \sigma) = 1$$

逆に $v(\psi \wedge \sigma) = 1$ **とすると**

$$v(\psi) = 1 \qquad\qquad v(\sigma) = 1$$

帰納法の仮定から

$$\psi \in \Gamma^* \qquad\qquad \sigma \in \Gamma^*$$

明らかに

$$\Gamma^* \vdash \psi \qquad\qquad \Gamma^* \vdash \sigma$$

従って, 導出規則$\wedge I$**を用いると**

$$\Gamma^* \vdash \psi \wedge \sigma$$

補題1．5．8から

$$\psi \wedge \sigma \in \Gamma^*$$

(3) $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$ **のとき**

$\psi \rightarrow \sigma \in \Gamma^*$ **とすると補題1．5．9から**

$$\psi \in \Gamma^* \Rightarrow \sigma \in \Gamma^*$$

$\psi \in \Gamma^*$ **のとき** $\sigma \in \Gamma^*$ **帰納法の仮定から**

$$v(\psi) = 1 \qquad v(\sigma) = 1$$

従って

$$v(\psi \rightarrow \sigma) = 1$$

$\psi \notin \Gamma^*$ **のとき 帰納法の仮定から**

$$v(\psi) = 0$$

従って

$$v(\psi \rightarrow \sigma) = 1$$

今度は　$v(\psi \to \sigma) = 1$　とすると

$$v(\psi) = 1 \qquad v(\sigma) = 1$$

または

$$v(\psi) = 0 \qquad v(\sigma) = 0,1$$

帰納法の仮定から

$$\psi \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma^*$$

または

$$\psi \notin \Gamma^*$$

となる．これは

$$\psi \in \Gamma^* \Rightarrow \sigma \in \Gamma^*$$

と等価であり，補題１．５．９から

$$\psi \to \sigma \in \Gamma^*$$

(4) $\varphi = \neg\psi$ のとき

$\neg\psi \in \Gamma^*$ とすると補題1．5．9から

$$\psi \notin \Gamma^*$$

帰納法の仮定から $v(\psi) = 0$ 従って

$$v(\neg\psi) = 1$$

逆に $v(\neg\psi) = 1$ とすると $v(\psi) = 0$ となり

帰納法の仮定から

$$\psi \notin \Gamma^*$$

補題1．5．9から

$$\neg\psi \in \Gamma^*$$

従って， $\varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$ **が証明できた．**

（注意）　導出は∧，→，¬のみを含む命題（論理式）に限定．

(c) $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ **であるから，** $\forall \psi \in \Gamma$ **に対して** $v(\psi) = 1$ **となる付値** v **が存在する．**

証明終

<u>系1．5．12</u>

$\Gamma \nvdash \varphi \iff$ $\forall \psi \in \Gamma$ **に対して** $v(\psi) = 1$ **となり，**
$v(\varphi) = 0$ **となる付値** v **が存在する．**

系1．5．12の証明

補題1．5．5 (a) の対偶から

$$\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ は無矛盾} \qquad (*3)$$

また，$\Gamma \vdash \varphi$ とすると $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$ となり

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は矛盾している．即ち

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ は矛盾}$$

この対偶は

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ は無矛盾} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \nvdash \varphi \qquad (*4)$$

従って(*3) と (*4) から

$$\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ は無矛盾}$$

補題1．5．4と補題1．5．11から

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **は無矛盾** $\Longleftrightarrow$ $\forall\psi \in \Gamma$ **に対して** $v(\psi) = 1$ **となり，** $v(\varphi) = 0$ **となる付値** v **が存在する．**

従って

$\Gamma \nvDash \varphi$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\psi \in \Gamma$ **に対して** $v(\psi) = 1$ **となり，** $v(\varphi) = 0$ **となる付値** v **が存在する．**

証明終

定理1．5．13　完全性

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$$

定理1．5．13の証明

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ は定理1．5．1で証明済み

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \qquad (*5)$$

を証明すればよい．

$\Gamma \nvdash \varphi$ を仮定する．

系1．5．12より$\forall \psi \in \Gamma$ に対して $v(\psi) = 1$ となり，$v(\varphi) = 0$ となる付値 v が存在する．即ち

$$\Gamma \not\models \varphi$$

従って $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$ が示せた.

結局, この対偶は

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

となり, (*5) が証明できた.

証明終

演習問題 9

Γ^* を極大無矛盾として，命題（論理式）ψ と σ が以下の条件を満足するものとする．

$$\psi \in \Gamma^* \Leftrightarrow v(\psi) = 1$$

$$\sigma \in \Gamma^* \Leftrightarrow v(\sigma) = 1$$

ここで v はある付値である．

$\varphi = \psi \vee \sigma$ とするとき

$$\varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$$

を満足することを証明せよ．

ヒント： $\psi \vee \sigma = \neg(\neg\psi \wedge \neg\sigma)$