数理論理学 (第6回)

2005.11.1

府川　和彦

1．4　自然演繹

前節までは，<u>真理値表</u>の観点で命題論理を考察した．
例えばトートロジーは真理値表に基いて定義した．
本節では，<u>導出（推論）</u>という観点で命題論理を捉える．

<u>導出</u>とは，<u>前提（仮定）</u>から<u>結論</u>を導くこと．

導出の形式：
$$\frac{\text{前提（仮定）}}{\text{結論}}$$

以下では，∧，→，⊥のみを含む論理式に限定する．
（{→，⊥ }は完全であり，これに∧ を加えた．）

導出規則

導入規則 (Introduction Rules)

$(\wedge I)$ $$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$(\rightarrow I)$ $$\frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathrm{M}\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I$$

消される仮定

$(\bot)$ $$\frac{\bot}{\varphi} \bot$$

矛盾

削除規則 (Elimination Rules)

$(\wedge E)$ $$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$(\rightarrow E)$ $$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

(RAA) $$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \mathrm{M} \\ \bot\end{array}}{\varphi} \mathrm{RAA}$$

消される仮定

矛盾

：背理法

(⊥) の意味： <u>矛盾からは任意の命題が導かれる．</u>

(⊥) の根拠

$\bot$	φ	$\bot \to \varphi$
0	1	1
0	0	1

従って $\models \bot \to \varphi$

消す仮定がなくても (→I) は成り立つ．

$$\frac{\psi}{\varphi \to \psi} \to I$$

具体例 I

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\varphi}\wedge E}{\psi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi}\to I_1$$

具体例 II

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\varphi\to\bot]^1}{\bot}\to E}{(\varphi\to\bot)\to\bot}\to I_1}{\varphi\to((\varphi\to\bot)\to\bot)}\to I_2$$

具体例 III

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\varphi}\wedge E \qquad [\varphi\to(\psi\to\sigma)]^2}{\psi\to\sigma}\to E}{\sigma}\to E}{\varphi\wedge\psi\to\sigma}\to I_1}{(\varphi\to(\psi\to\sigma))\to(\varphi\wedge\psi\to\sigma)}\to I_2$$

<u>記号の定義</u>

$\dfrac{\mathrm{M}}{\varphi}$ を $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}$ と，$\dfrac{\mathrm{M}}{\varphi}^{[\psi]}$ を $\begin{matrix} [\psi] \\ D \\ \varphi \end{matrix}$ と表す．

<u>定義1．4．1</u>　以下の条件を満足する最小の X を導出の集合と定める．

(1) **任意の論理式** $\varphi \in PROP$ **に対し，** $\varphi \in X$

(2∧) $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}, \begin{matrix} D' \\ \varphi' \end{matrix} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{matrix} D & D' \\ \varphi & \varphi' \end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'} \in X$

$\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\varphi}, \dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\psi} \in X$

(2→) $\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \in X$

$\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array}, \begin{array}{c}D'\\ \varphi \to \psi\end{array} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D'\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \in X$

(2⊥) $\begin{array}{c}D\\ \bot\end{array} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \bot\end{array}}{\varphi} \in X$

$\begin{array}{c}\neg\varphi\\ D\\ \bot\end{array} \in X$ **ならば** $\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ D\\ \bot\end{array}}{\varphi} \in X$

＊）　X の定義は, $PROP$と同様に帰納的定義になっている.

<u>定義1．4．2</u>　結論 φ , {消されずに残った仮定の集合}$\subseteq\Gamma$となる導出が存在するとき，$\Gamma \vdash \varphi$ と書く. このときφ はΓから導出可能という.

$\Gamma = \emptyset$ のとき $\vdash \varphi$ と書き，φ を<u>定理</u>と呼ぶ.

<u>定理1．4．4</u>

(1)　$\vdash \quad \varphi \to (\psi \to \varphi)$

(2)　$\vdash \quad \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

(3)　$\vdash \quad (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)]$

(4)　$\vdash \quad (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(5)　$\vdash \quad \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

(6)　$\vdash \quad (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$

(7)　$\vdash \quad \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

定理1．4．4の<u>証明</u>

(1)

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}\to I}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1$$

$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$

であることに注意

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \quad [\neg\varphi]^1}{\bot}\to E}{\psi}\bot}{\neg\varphi \to \psi}\to I_1}{\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)}\to I_2$$

(3)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \quad [\varphi \to \psi]^3}{\psi} \to E \qquad [\psi \to \sigma]^2}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I_1}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))} \to I_3
$$

(4)

(3) で σ に⊥を代入する

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \bot) \to (\varphi \to \bot)]$$

$$\Longleftrightarrow \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\psi]^1$}
\AxiomC{$[\neg\psi \to \neg\varphi]^3$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA_1}
\UnaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \psi$}
\RightLabel{$\to I_3$}
\UnaryInfC{$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{D}
\AxiomC{$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$}
\AxiomC{D'}
\AxiomC{$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$}
\BinaryInfC{$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$}
\end{prooftree}
$$

(5)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \quad [\neg\varphi]^2}{\bot}\,\to E}{\neg\neg\varphi}\,\mathrm{RAA}_2}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\,\to I_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^1 \quad [\neg\neg\varphi]^2}{\bot}\,\to E}{\varphi}\,\mathrm{RAA}_1}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I_2$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\varphi \to \neg\neg\varphi) \end{array} \quad \begin{array}{c} D' \\ (\neg\neg\varphi \to \varphi) \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi}$$

(6) と (7) の証明は演習問題

<u>定理の証明の方針</u>　　例として

$$(\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$$

が定理であることを証明する.

第1段階:	前提 (仮定)	$(\varphi \wedge \psi \to \sigma)$
第2段階:	結論 $(\varphi \to (\psi \to \sigma))$ の仮定	φ
第3段階:	$(\psi \to \sigma)$ の仮定	ψ

仮定の集合: $\{(\varphi \wedge \psi \to \sigma), \varphi, \psi\}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\AxiomC{$[\psi]^1$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\varphi \wedge \psi$}
\AxiomC{$[\varphi \wedge \psi \to \sigma]^3$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{σ}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$\psi \to \sigma$}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$\varphi \to (\psi \to \sigma)$}
\RightLabel{$\to I_3$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$}
\end{prooftree}
$$

演習問題 6

以下の定理を証明せよ.

(6-1) $\vdash \quad (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$

(6-2) $\vdash \quad \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg \varphi)$