数理論理学 (第5回)

2005.10.25

府川　和彦

1．3．1　論理積標準形と論理和標準形

定義1．3．7

$$\begin{cases} \mathop{\mathrm{I}}\limits_{i\le 0} \varphi_i = \varphi_0 \\ \mathop{\mathrm{I}}\limits_{i\le n+1} \varphi_i = \left(\mathop{\mathrm{I}}\limits_{i\le n} \varphi_i \right) \wedge \varphi_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathop{\mathrm{Y}}\limits_{i\le 0} \varphi_i = \varphi_0 \\ \mathop{\mathrm{Y}}\limits_{i\le n+1} \varphi_i = \left(\mathop{\mathrm{Y}}\limits_{i\le n} \varphi_i \right) \vee \varphi_{n+1} \end{cases}$$

定義1．3．8

φ_{ij} **を原子論理式または原子論理式の否定とする**

$$\varphi = \mathop{\mathrm{I}}\limits_{i\le n} \mathop{\mathrm{Y}}\limits_{j\le m} \varphi_{ij}$$

：論理式 φ **の<u>論理積標準形</u>**
(conjunctive normal form)

$$\varphi = \mathop{\mathrm{Y}}\limits_{i\le n} \mathop{\mathrm{I}}\limits_{j\le m} \varphi_{ij}$$

：論理式 φ **の<u>論理和標準形</u>**
(disjunctive normal form)

論理積標準形の例

$$\varphi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_3 \vee p_4)$$

論理和標準形の例

$$\varphi = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$$

<u>定理1．3．9</u>　任意の論理式 $\varphi \in PROP$ に対して，論理積標準形 $\varphi^{\wedge}$ と論理和標準形 $\varphi^{\vee}$ が存在し，

$$\models \varphi \leftrightarrow \varphi^{\wedge} \qquad \left(\varphi \Leftrightarrow \varphi^{\wedge}\right)$$

$$\models \varphi \leftrightarrow \varphi^{\vee} \qquad \left(\varphi \Leftrightarrow \varphi^{\vee}\right)$$

が成り立つ．

定理1．3．9 の証明

{∨，¬}は完全である．即ち，任意の論理式は{∨，¬} のみで表すことができる．ここでは結合子として，{∧，∨，¬}のみを考える．

次に，論理式の構造的帰納法を適用して定理を証明する．

(a) φ が原子論理式の場合　　$\varphi^{\wedge} = \varphi^{\vee} = \varphi$

(b) ψ, σ が定理を満足するとき，$\varphi = \psi \wedge \sigma$ に対して定理が成り立つことを示す．

(b-1) ψ, σ の論理積標準形を $\psi^{\wedge}$, $\sigma^{\wedge}$ とする．明らかに

$$\varphi = \psi \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi^{\wedge} = \psi^{\wedge} \wedge \sigma^{\wedge}$$

(b-2) ψ, σ の論理和標準形を $\psi^{\vee}$, $\sigma^{\vee}$ とする.
定義から

$$\psi^{\vee} = \bigvee_{i \le n} \psi_i \qquad \sigma^{\vee} = \bigvee_{j \le m} \sigma_j$$

と表すことができる. ここで, ψ_i , σ_j は原子論理式または原子論理式の否定の論理積である.

$$\varphi = \psi \wedge \sigma \Leftrightarrow \psi^{\vee} \wedge \sigma^{\vee} \Leftrightarrow \bigvee_{i \le n} \psi_i \wedge \bigvee_{j \le m} \sigma_j$$

$$\bigvee_{i \le n} \psi_i \wedge \bigvee_{j \le m} \sigma_j \Leftrightarrow (\psi_0 \vee \psi_1 \vee \Lambda\ \psi_n) \wedge (\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \Lambda\ \sigma_m)$$

$$\Leftrightarrow (\psi_0 \wedge (\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \Lambda\ \sigma_m)) \vee (\psi_1 \wedge (\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \Lambda\ \sigma_m)) \vee \Lambda$$

$$\vee (\psi_n \wedge (\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \Lambda\ \sigma_m))$$

$$\Leftrightarrow (\psi_0 \wedge \sigma_0) \vee (\psi_0 \wedge \sigma_1) \vee \Lambda\ (\psi_0 \wedge \sigma_m) \vee (\psi_1 \wedge \sigma_0) \vee \Lambda$$

$$\vee (\psi_n \wedge \sigma_m)$$

従って

$$\mathop{\Upsilon}_{i\le n}\psi_i \wedge \mathop{\Upsilon}_{j\le m}\sigma_j \Leftrightarrow \mathop{\Upsilon}_{i\le n,\, j\le m}(\psi_i \wedge \sigma_j)$$

$$\varphi^{\vee} = \mathop{\Upsilon}_{i\le n,\, j\le m}(\psi_i \wedge \sigma_j)$$

(c) ψ, σ が定理を満足するとき，$\varphi = \psi \vee \sigma$ に対して定理が成り立つことを示す．

(b)と同様に証明できる．

(d) ψ が定理を満足するとき，$\varphi = \neg\psi$ に対して定理が成り立つことを示す．

(d-1) φ の論理積標準形

ψ の論理和標準形 $\psi^{\vee}$ を以下のように定める.

$$\psi^{\vee} = \bigcup_{i \le n} \bigcap_{j \le m} \psi_{ij}$$

ここで ψ_{ij} は原子論理式または原子論理式の否定である.

$$\varphi = \neg \psi$$

$$\Leftrightarrow \neg \left(\bigcup_{i \le n} \bigcap_{j \le m} \psi_{ij} \right) \Leftrightarrow \bigcap_{i \le n} \neg \left(\bigcap_{j \le m} \psi_{ij} \right) \Leftrightarrow \bigcap_{i \le n} \bigcup_{j \le m} \neg \psi_{ij}$$

$\neg \psi_{ij}$ は ψ_{ij} が原子論理式のとき, 原子論理式の否定,
ψ_{ij} が原子論理式の否定のとき, 原子論理式となる.

従って, 上式は論理積標準形となる.

(d-2) φ **の論理和標準形**

(d-1) **と同様に証明できる. ⇒演習問題5-1**

以上証明終り

1．3．2　双対定理

(I) **分配則**

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad (1)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \qquad (2)$$

(II) **ドモルガンの法則**

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad (3)$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad (4)$$

式(1)**と**(2)**は双対の関係（∨と∧を入換えた関係）にある．**
また，式(3)**と**(4)**も双対の関係にある．**

このとき，
•式(1)が成立すれば，式(2)も自動的に成立すること
•式(3)が成立すれば，式(4)も自動的に成立すること
を証明する．(双対定理の証明)
　一般に，ある論理式がトートロジーであれば，その双対な論理式もトートロジーである．

<u>定義1．3．10</u>　*PROP* から *PROP* への写像 $*$ を以下のように定める

$$\varphi^* = \neg\varphi \qquad \varphi \text{ は原子論理式のとき}$$

$$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$$

$$(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$$

$$(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$$

具体例 $(p_1 \vee p_2)^* = p_1{}^* \wedge p_2{}^* = \neg p_1 \wedge \neg p_2$

<u>補題1．3．12</u>

$$\varphi^* \Leftrightarrow \neg\varphi$$

<u>証明</u>　**構造的帰納法を用いて証明する．**

(a) φ **が原子論理式のとき**

$$\varphi^* = \neg\varphi$$

(b) ψ, σ **が補題を満足するとき，** $\varphi = \psi \wedge \sigma$ **に対して補題が成り立つことを示す．**

$$(\sigma \wedge \psi)^* = \sigma^* \vee \psi^* \Leftrightarrow \neg\sigma \vee \neg\psi \Leftrightarrow \neg(\sigma \wedge \psi)$$

(c) ψ, σ **が補題を満足するとき，** $\varphi = \psi \vee \sigma$ **に対して補題が成り立つことを示す．**

$$(\sigma \vee \psi)^* = \sigma^* \wedge \psi^* \Leftrightarrow \neg\sigma \wedge \neg\psi \Leftrightarrow \neg(\sigma \vee \psi)$$

(d) ψ **が補題を満足するとき，** $\varphi = \neg\psi$ **に対して補題が成り立つことを示す．**

$$(\neg\psi)^* = \neg\psi^* \Leftrightarrow \neg(\neg\psi)$$

証明終り

<u>定義1．3．13</u> *PROP* **から** *PROP* **への写像** d **を以下のように定める（写像** d **は双対の関係にある論理式への写像）**

$$\varphi^d = \varphi \qquad \varphi \text{ は原子論理式のとき}$$

$$(\varphi \wedge \psi)^d = \varphi^d \vee \psi^d$$

$$(\varphi \vee \psi)^d = \varphi^d \wedge \psi^d$$

$$(\neg\varphi)^d = \neg\varphi^d$$

具体例

$$(p_1 \vee p_2)^d = p_1{}^d \wedge p_2{}^d = p_1 \wedge p_2$$

$$(p_1 \vee p_2)^* = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \quad \text{であるから}$$

$$(p_1 \vee p_2)^* = (\neg p_1 \vee \neg p_2)^d$$

<u>定理1．3．14</u>　双対定理（Duality Theorem）

$$\models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{と} \quad \models \varphi^d \leftrightarrow \psi^d \quad \text{は等価}$$

定理1．3．14の<u>証明</u>

$\varphi[\tau_1, \Lambda\ \tau_n / p_1, \Lambda\ p_n]$ ：φ に現れる 全ての原子論理式 $\{p_i\}$ を $\{\tau_i\}$ に，同時に置き換えて得られる論理式

<u>写像 $*$ と d の関係</u>

(1) φ が原子論理式のとき

$$\varphi^* = \neg\varphi \qquad \varphi^d = \varphi$$

(2) φ が原子論理式でないとき定義は同じだから

$$\varphi^* \Leftrightarrow \varphi^d[\neg p_1, \Lambda\ \neg p_n / p_1, \Lambda\ p_n]$$

（これは構造的帰納法で証明できる⇒演習問題5-2）

従って

$$\varphi^*[\neg p_1,\Lambda\ \neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n] \Leftrightarrow \varphi^d[\neg\neg p_1,\Lambda\ \neg\neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n]$$

$$\varphi^*[\neg p_1,\Lambda\ \neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n] \Leftrightarrow \varphi^d \qquad (5)$$

同様に

$$\psi^*[\neg p_1,\Lambda\ \neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n] \Leftrightarrow \psi^d \qquad (6)$$

$\models \varphi \leftrightarrow \psi$ **即ち** $\varphi \Leftrightarrow \psi$ **とすると**

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$$

$$\varphi^* \Leftrightarrow \psi^* \qquad \longleftarrow \quad \textbf{補題1．3．12}$$

$$\varphi^*[\neg p_1,\Lambda\ \neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n]$$

$$\Leftrightarrow \psi^*[\neg p_1,\Lambda\ \neg p_n / p_1,\Lambda\ \ p_n]$$

式(5)と(6)を用いると

$$\varphi^d \Leftrightarrow \psi^d \quad \text{即ち} \quad \models \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$$

逆に，$\varphi^d \Leftrightarrow \psi^d$ が成立するとする．

証明した結果（$\varphi \Leftrightarrow \psi$ ならば $\varphi^d \Leftrightarrow \psi^d$）を用いると

$$\varphi^{dd} \Leftrightarrow \psi^{dd}$$

一方，

$$\varphi^{dd} = \varphi \qquad \psi^{dd} = \psi$$

（この証明は演習問題5-3）

従って

$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$

証明終り

演習問題 5

(5-1) (d-2)の部分を証明し，定理１．３．９の証明を完成せよ．

(5-2) 以下の関係を構造的帰納法を用いて証明せよ．

$$\varphi^* \Leftrightarrow \varphi^d[\neg p_1, \Lambda\ \neg p_n / p_1, \Lambda\ p_n]$$

(5-3) 以下の関係を証明せよ．

$$\varphi^{dd} = \varphi$$