数理論理学 (第4回)

2004.10.19

府川　和彦

「1．2　意味論」の続き

$\varphi[\psi / p_i]$:　φ に現れる p_i を全て ψ で置き換えた論理式

例　$\varphi = p_1 \wedge p_0 \to (p_0 \to p_3)$

$$\varphi[\neg p_0 \to p_3 / p_0]$$

$$= p_1 \wedge (\neg p_0 \to p_3) \to ((\neg p_0 \to p_3) \to p_3)$$

定義1．2．5　代入の再帰的定義

$$\varphi[\psi / p_i] = \begin{cases} \varphi & \text{if } \varphi \text{ atom and } \varphi \neq p_i \\ \psi & \text{if } \varphi = p_i \end{cases}$$

$$(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi / p_i] = \varphi_1[\psi / p_i] \Box \varphi_2[\psi / p_i]$$

$$(\neg \varphi)[\psi / p_i] = \neg \varphi\ [\psi / p_i]$$

<u>定理1．2．6</u>　代入定理 (Substitution Theorem)

$$\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \text{ ならば } \models \psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]$$

なお, p は原子論理式

この定理を証明するため, 以下の補題1．2．7を証明する.

<u>補題1．2．7</u> <u>(i)</u>

$$v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \leq v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p])$$

補題1．2．7 (i) の<u>証明</u>

$v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 0$ のとき明らかに成り立つ.

$v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 1$ となる v だけを考え,

$v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]) = 1$ を構造的帰納法で証明する.

(i) ψ **が原子論理式の場合**

$\psi = p$ **の場合**

$$\psi[\varphi_1 / p] = \varphi_1 \quad \psi[\varphi_2 / p] = \varphi_2$$ **だから**

$$v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]) = v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 1$$

$\psi \neq p$ **の場合**

$$\psi[\varphi_1 / p] = \psi \quad \psi[\varphi_2 / p] = \psi$$ **だから**

$$v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]) = v(\psi \leftrightarrow \psi) = 1$$

(ii) $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$ **の場合**　　**帰納法の仮定から**

$$v(\psi_1[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2 / p]) = 1$$
$$v(\psi_2[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi_2[\varphi_2 / p]) = 1$$

定義1．2．1から

$$v(\psi_1[\varphi_1 / p]) = v(\psi_1[\varphi_2 / p])$$
$$v(\psi_2[\varphi_1 / p]) = v(\psi_2[\varphi_2 / p])$$

定義1．2．5から

$$v((\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_1 / p]) = v(\psi_1[\varphi_1 / p] \square \psi_2[\varphi_1 / p])$$
$$v((\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_2 / p]) = v(\psi_1[\varphi_2 / p] \square \psi_2[\varphi_2 / p])$$

従って

$$v((\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_1 / p]) = v(\psi_1[\varphi_2 / p] \square \psi_2[\varphi_2 / p])$$
$$= v((\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_2 / p])$$

$$v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]) = 1$$

(iii) $\psi = \neg \psi_1$ **の場合**　　**帰納法の仮定から**

$$v(\psi_1[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2 / p]) = 1$$

定義1．2．1から

$$v(\psi_1[\varphi_1 / p]) = v(\psi_1[\varphi_2 / p])$$

定義1．2．5から

$$v((\neg \psi_1)[\varphi_1 / p]) = v(\neg \psi_1[\varphi_1 / p])$$
$$= 1 - v(\psi_1[\varphi_1 / p]) = 1 - v(\psi_1[\varphi_2 / p])$$
$$= v(\neg \psi_1[\varphi_2 / p]) = v((\neg \psi_1)[\varphi_2 / p])$$

$$v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]) = 1$$

補題1．2．7 (i) **の証明終**

補題1．2．7 (ii)

$$\models ((\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \to (\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]))$$

系1．2．8

$\models \varphi \to \psi$ **であることの必要十分条件は** $\forall v, v(\varphi) \leq v(\psi)$

<u>系の証明</u>

$\forall v, v(\varphi) \leq v(\psi)$ **であれば全ての付値** v **で**

$v(\varphi) = 1, v(\psi) = 1$ **または**

$v(\varphi) = 0, v(\psi) = 1$ **または**

$v(\varphi) = 0, v(\psi) = 0$

従って $\forall v, v(\varphi \to \psi) = 1 \Longrightarrow \models \varphi \to \psi$

逆に $\models \varphi \to \psi$ **であれば全ての付値** v **で**

$$v(\varphi)=1, v(\psi)=1 \quad \text{または}$$

$$v(\varphi)=0, v(\psi)=1 \quad \text{または}$$

$$v(\varphi)=0, v(\psi)=0$$

従って，　$\forall v, v(\varphi) \leq v(\psi)$

系１．２．８の証明終

補題１．２．７ (ii) の<u>証明</u>

補題１．２．７ (i) より

$$v(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \leq v(\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p])$$

系１．２．８より

$$\models ((\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \rightarrow (\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]))$$

証明終

定理１．２．６の<u>証明</u>

補題１．２．７ (ii) から

$$\models ((\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \rightarrow (\psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]))$$

従って　$\models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$　ならば

$$\models \psi[\varphi_1 / p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2 / p]$$

証明終

１．３　命題論理の諸性質

ブール代数 (Boolean Algebra) **とは命題論理を<u>代数計算</u>として捉えるものであり，この節では，ブール代数により得られた結果について説明する．**

<u>定理１．３．１</u>　以下の命題はトートロジーである．

(1) **分配則**

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(2) **ドモルガンの法則**

$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

トートロジーであることの証明の一つの手法として
<u>真理値表</u>がある.

$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ **の証明**

$$\sigma = \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	σ
v_1	0	0	0	1	1	1	1	1
v_2	0	1	0	1	1	0	1	1
v_3	1	0	0	1	0	1	1	1
v_4	1	1	1	0	0	0	0	1

σは<u>全ての付値で1となっている</u>.

補題1．3．2

$\models \varphi \to \psi$ **ならば** $\models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi$ **であり**

$\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$

<u>証明</u>

系1．2．8 から

$$\models \varphi \to \psi \quad \Longrightarrow \quad \forall v, v(\varphi) \leq v(\psi)$$

となる．従って

$$\forall v, v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\} = v(\varphi)$$

$$\forall v, v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi$$

$$\forall v, v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\} = v(\psi)$$

$$\forall v, v(\varphi \vee \psi) = v(\psi) \quad \Longrightarrow \quad \models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$$

<u>定理1．3．4</u>

$$\models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

証明省略

$\models \varphi \leftrightarrow \psi$ **のとき** $\varphi \Leftrightarrow \psi$ **と表す．**

<u>補題1．3．5</u>

(1) **反射律** $\varphi \Leftrightarrow \varphi$

(2) **対称律** $\varphi \Leftrightarrow \psi$ **ならば** $\psi \Leftrightarrow \varphi$

(3) **推移律** $\varphi \Leftrightarrow \psi$ **かつ** $\psi \Leftrightarrow \sigma$ **ならば** $\varphi \Leftrightarrow \sigma$

このように，反射律，対称律，推移律を満たす2項関係を
<u>同値関係</u>という．

以下で定める n 重結合子 $\phi(p_1, p_2, \ldots p_n)$ を考える.

$$v(\phi(p_1, p_2, \Lambda\ p_n)) = f(v(p_1), v(p_2), \Lambda\ v(p_n))$$

f ：0か1のいずれかの値を持つ関数

<u>定理1．3．6</u>　任意のn 重結合子 $\phi(p_1, p_2, \ldots p_n)$ に対して,
$p_1, p_2, \ldots p_n$,　$\vee$, $\neg$ のみを含む論理式 $\tau \in PROP$が存在し,

$$\tau \Leftrightarrow \phi(p_1, p_2, \Lambda\ p_n)$$

が成り立つ.

<u>証明</u>　変数の数 n に関して帰納法を適用する.

(I) $n = 1$のとき，以下に示す4通りの真理値表しかない．

p	$\phi_1(p)$	$\phi_2(p)$	$\phi_3(p)$	$\phi_4(p)$
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

ここで

$$\tau_1 = p$$

$$\tau_2 = \neg p$$

$$\tau_3 = p \vee \neg p$$

$$\tau_4 = \neg(p \vee \neg p)$$

とおくと，

$$\tau_i \Leftrightarrow \phi_i, i = 1,2,3,4$$

(II) n 重結合子まで定理が成り立つと仮定し, n+1重結合子 $\phi(p_1, p_2, \ldots p_n, p_{n+1})$ を考える.
その真理値表は以下のように書ける.

p_1	p_2	Λ	p_{n+1}	$\phi(p_1, \Lambda\ p_{n+1})$
0	0	Λ	0	i_1
M	M	M	M	M
0	1	Λ	1	i_{2^n}
1	0	Λ	0	i_{2^n+1}
M	M	M	M	M
1	1	Λ	1	$i_{2^{n+1}}$

帰納法の仮定より，真理値表の上半分に対応する n 重結合子 $\sigma_1(p_2, \ldots p_n, p_{n+1})$，下半分に対応する n 重結合子 $\sigma_2(p_2, \ldots p_n, p_{n+1})$ が存在し，σ_1とσ_2は∨，¬のみを含む論理式として表すことができる．さらに

$$\phi(p_1, p_2, \Lambda\ p_{n+1}) \Leftrightarrow (\neg p_1 \to \sigma_1) \wedge (p_1 \to \sigma_2)$$

が成立する．これを証明すると

(i) $v(p_1) = 0$ の場合 $\quad v(p_1 \to \sigma_2) = 1$

$$v((\neg p_1 \to \sigma_1) \wedge (p_1 \to \sigma_2)) = v(\neg p_1 \to \sigma_1) = v(\sigma_1)$$

(ii) $v(\neg p_1) = 0$ の場合 $\quad v(\neg p_1 \to \sigma_1) = 1$

$$v((\neg p_1 \to \sigma_1) \wedge (p_1 \to \sigma_2)) = v(p_1 \to \sigma_2) = v(\sigma_2)$$

さらに，

$$(\neg p_1 \to \sigma_1) \wedge (p_1 \to \sigma_2) \Leftrightarrow (p_1 \vee \sigma_1) \wedge (\neg p_1 \vee \sigma_2)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p_1 \vee \sigma_1) \vee \neg(\neg p_1 \vee \sigma_2))$$

従って， $\phi(p_1, p_2, \ldots p_n, p_{n+1})$ **は∨，¬のみで表すことができる．**

証明終

これで，任意の n **重結合子** ϕ **は，**{∨，¬}**のみで表せることがわかる．このとき，**{∨，¬}**は完全であるという．なお，**{∧，¬}**，**{→，¬}**，**{⊥，→}**も完全である．**

演習問題4

(4-1)　{⊥，→}が完全であることを証明せよ.

(4-2)　以下を証明せよ.

(a) $\models (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$

(b) $\models \varphi \to (\psi \to \varphi)$