数理論理学 (第2回)

2005.10.11

府川　和彦

「1．1　命題と結合子」の続き

論理式を引数とする関数，その帰納的定義の例

$b(\varphi)$：論理式 φ のかっこの数

$$\begin{cases} b(\varphi) = 0 & \varphi \text{ が原子論理式の場合} \\ b((\varphi \square \psi)) = b(\varphi) + b(\psi) + 2 \\ b((\neg \varphi)) = b(\varphi) + 2 \end{cases}$$

論理式を引数とする関数の値は，それを構成する論理式の関数値から計算できる．

定理1．1．6　帰納的定義 (Definition by Recursion)

$A^2 \to A$　の写像　$H_{\Box}$　　(Aは自然数，実数，グラフ等)

$A \to A$　の写像　$H_{\neg}$

原子論理式 $\to A$　の写像　H_{at} が与えられたとき

以下の関係を満足する $PROP \to A$　の写像　F
がただ一つ存在する．

$$\begin{cases} F(\varphi) = H_{at}(\varphi) & \varphi \text{ が原子論理式の場合} \\ F((\varphi \Box \psi)) = H_{\Box}\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \\ F((\neg\varphi)) = H_{\neg}\big(F(\varphi)\big) \end{cases}$$

定理1．1．6の証明

(I) **写像** F **が存在することの証明：** $\forall \varphi \in PROP, \exists F(\varphi)$

論理式の構造的帰納法 (Induction Principle) **を用いて，証明する．**

(i) **全ての原子論理式** φ **において**

$$F(\varphi) \quad = H_{at}(\varphi) \Rightarrow \exists F(\varphi)$$

(ii) $\varphi, \psi \in PROP, \exists F(\varphi), \exists F(\psi)$ **とすると**

$$F((\varphi \square \psi)) \quad = H_{\square}\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \Rightarrow \exists F((\varphi \square \psi))$$

(iii) $\varphi \in PROP, \exists F(\varphi)$ **とすると**

$$F((\neg \varphi)) \quad = H_{\neg}\big(F(\varphi)\big) \Rightarrow \exists F((\neg \varphi))$$

従って， $\forall \varphi \in PROP, \exists F(\varphi)$

(II) 写像 F がただ一つ存在することの証明:

写像 F が複数存在するとして, 任意の写像の組 F_1, F_2 を考える.

$$\forall \varphi \in PROP, F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$$

これを, 論理式の構造的帰納法を用いて証明する.

(i) 全ての原子論理式 φ において

$$F_1(\varphi) = H_{at}(\varphi), \quad F_2(\varphi) = H_{at}(\varphi) \Rightarrow \quad F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$$

(ii) $\varphi, \psi \in PROP, F_1(\varphi) = F_2(\varphi), F_1(\psi) = F_2(\psi)$ とすると

$$F_1((\varphi \square \psi)) = H_{\square}(F_1(\varphi), F_1(\psi))$$
$$= H_{\square}(F_2(\varphi), F_2(\psi)) = F_2((\varphi \square \psi))$$

(iii) $\varphi \in PROP, F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$ **とすると**

$$F_1((\neg\varphi)) = H_{\neg}\left(F_1(\varphi)\right) = H_{\neg}\left(F_2(\varphi)\right) = F_2((\neg\varphi))$$

従って， $\forall \varphi \in PROP, F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$

(I), (II) **から証明終り**

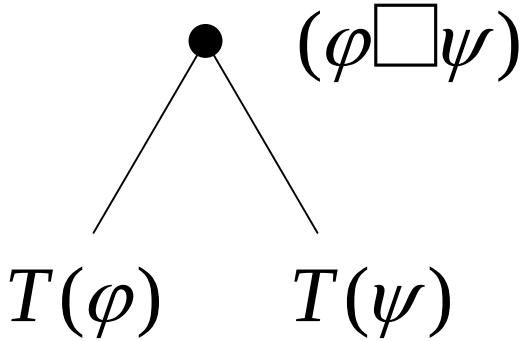
帰納的定義 (Definition by Recursion) の具体例

例1：論理式の分解木

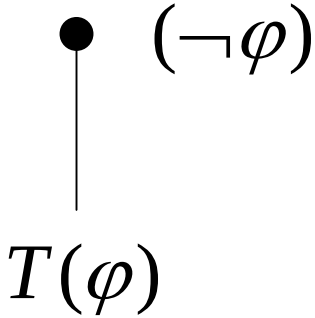
$T(\varphi) =$

φ が原子論理式の場合

$T(\varphi \square \psi) =$



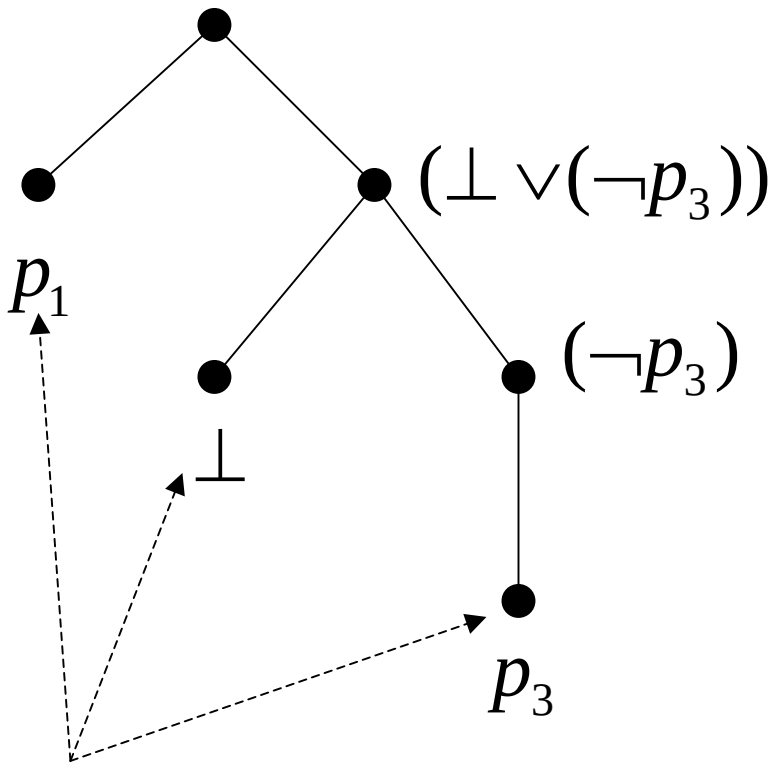
$T((\neg\varphi)) =$



分解木の例

$T((p_1 \to (\bot \vee (\neg p_3))))$

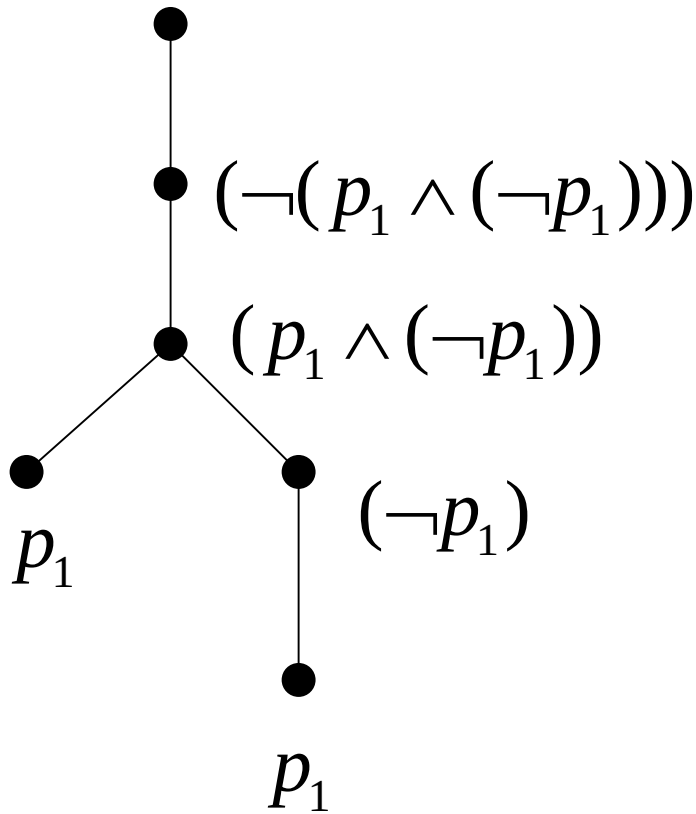
$(p_1 \to (\bot \vee (\neg p_3)))$



原子論理式

$T((\neg(\neg(p_1 \wedge (\neg p_1)))))$

$(\neg(\neg(p_1 \wedge (\neg p_1))))$



例2：ランク $r(\varphi)$ **の定義**

$$\begin{cases} r(\varphi) = 0 & \varphi \text{ が原子論理式の場合} \\ r((\varphi \Box \psi)) = \max(r(\varphi), r(\psi)) + 1 \\ r((\neg\varphi)) = r(\varphi) + 1 \end{cases}$$

例3：帰納的定義 を用いた部分論理式 (subformula) **の定義**

定義1．1．7　部分論理式の集合 $Sub(\varphi)$ **を以下のように定める．**

$$\begin{cases} Sub(\varphi) = \{\varphi\} & \varphi \text{ が原子論理式の場合} \\ Sub((\varphi \Box \psi)) = Sub(\varphi) \cup Sub(\psi) \cup \{(\varphi \Box \psi)\} \\ Sub((\neg\varphi)) = Sub(\varphi) \cup \{(\neg\varphi)\} \end{cases}$$

$\psi \in Sub(\varphi)$ **のとき** ψ **は** φ **の部分論理式という．**

部分論理式の例

$\big((p_1 \to (\neg p_2)) \vee (p_2 \wedge p_3)\big)$ **の部分論理式の集合は**

$$\{p_1, p_2, p_3, (\neg p_2), (p_1 \to (\neg p_2)), (p_2 \wedge p_3),$$
$$\big((p_1 \to (\neg p_2)) \vee (p_2 \wedge p_3)\big)\}$$

である．（一つに決まる．）

論理式の表記簡便化の規則

1. 外側のかっこ () は省略する.
2. ¬ は1番結びつきが強い.
3. ∧と∨は→と ↔ より結びつきが強い.

具体例

$$((\neg\varphi)\vee\varphi) \qquad \neg\varphi\vee\varphi$$

$$(\neg((\neg(\neg(\neg\varphi)))\wedge\bot)) \Longrightarrow \neg(\neg\neg\neg\varphi\wedge\bot)$$

$$((\varphi\vee\psi)\to\varphi) \qquad \varphi\vee\psi\to\varphi$$

$$(\varphi\to(\varphi\vee(\psi\to\chi))) \qquad \varphi\to\varphi\vee(\psi\to\chi)$$

(注意) 簡略化したものは厳密には論理式でない.
真の論理式は簡略化する前のものである.

1．2　意味論 (Semantics)

意味論：　論理式が表現している<u>意味</u>や<u>内容</u>に基き，論理を研究する立場

⇕

構文論 (Syntax)**：　論理式を<u>記号の列</u>としてとらえ，論理を研究する立場**

<u>論理式の解釈</u>

まず，原子論理式 (atoms) **の真偽 を決定し，結合子の規則を決めれば，論理式の真偽は確定する．**

真 (true) **を1，偽** (false) **を0とする．**

	p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$	$\neg p_1$	$\neg p_2$
v_1	0	0	0	0	1	1	1	1
v_2	0	1	0	1	1	0	1	0
v_3	1	0	0	1	0	0	0	1
v_4	1	1	1	1	1	1	0	0

v_1, v_2, v_3, v_4 ：**付値** (valuation)

<u>定義1．2．1</u>　写像 v: $PROP$ → {0, 1} **が以下の条件を満足するとき，** v **を付値** (valuation) **という．**

$$v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \to \psi) = 0 \quad \Leftrightarrow v(\varphi) = 1, v(\psi) = 0$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \qquad \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi)$$

$$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$$

$$v(\bot) = 0$$

<u>定理1．2．2</u>　$f(\bot) = 0$ **となる写像** f: {atoms}→{0, 1} **が与えられたとする．このとき，全ての原子論理式** p_i **に対して，** $v(p_i) = f(p_i)$ **となる付値** v **が一意に決まる．**

<u>定理１．２．３</u>　**論理式 φ の中に現れる原子論理式を $\{p_i\}$ とする．このとき，全ての p_i に対して $v(p_i) = v'(p_i)$ ならば，$v(\varphi) = v'(\varphi)$ である．ただし，v, v' は付値である．**

<u>証明</u>：　論理式の構造的帰納法を用いる．

(i)　**論理式 φ が原子論理式の場合，明らかに** $v(\varphi) = v'(\varphi)$

(ii)　**論理式 φ, ψ が** $v(\varphi) = v'(\varphi), v(\psi) = v'(\psi)$ **を満足するとする．**

定義１．２．１（付値の定義）から

$$v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$$

$$= \min\{v'(\varphi), v'(\psi)\} = v'(\varphi \wedge \psi)$$

他の結合子についても同様で， $v(\varphi \,\square\, \psi) = v'(\varphi \,\square\, \psi)$ **となる．**

(iii) **論理式 φ が** $v(\varphi) = v'(\varphi)$ **を満足するとする．**

$$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi) = 1 - v'(\varphi) = v'(\neg\varphi)$$

従って， *PROP* **に含まれる全ての論理式 φ について成立する．**

<u>定義1．2．4</u>

(i) **全ての付値** v **に対して** $v(\varphi) = 1$ **であるならば，論理式** φ **は**
<u>トートロジー</u> <u>(tautology)</u> **といい，** $\models \varphi$ **と表す．**

(ii) Γ **を論理式の集合として，** Γ **に含まれる全ての論理式** φ **に対して** $v(\varphi) = 1$ **となる任意の付値** v **を考える．この付値** v **に対して** $v(\psi) = 1$ **であるならば，** $\Gamma \models \psi$ **と表す．**

(i) **の例**

$$\models \varphi \to \varphi, \quad \models \neg\neg\varphi \to \varphi, \quad \models \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

(ii) **の例**

$$\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi, \quad \varphi, \varphi \to \psi \models \psi, \quad \varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

演習問題2

r をランクを表す関数とする.

(2-1) $\forall \varphi \in PROP$ に対して, $r(\varphi)$ は φ に含まれる結合子の数以下となることを証明せよ.

(2-2) ψ を φ の任意の部分論理式とするとき, $\forall \varphi \in PROP$ に対して, 以下の関係を証明せよ.

$$r(\psi) \leq r(\varphi)$$