数理論理学 (第1回)

2005.10.4

府川　和彦

数理論理学の意義

近年，計算機の性能が飛躍的に向上し，ソフトウェアの技法が高度に発達したため，(数理) 論理学の計算機科学への応用が可能となり，数理論理学が情報科学のいろいろな分野の基礎となっている．

応用例

人工知能論
論理プログラム
プログラムの検証理論など

第1章．命題論理

この章では最も基礎となる古典命題論理について解説する．

１．１　命題 (proposition) と結合子(connective)

- 論理学は論理的思考，推論を研究対象とする学問
- 推論はいくつかの基本的な文（命題）の組み合わせ

命題(proposition)とは<u>真偽が確定している文</u>
疑問文とか命令文は命題ではない

命題の例1

(1) $1 + 3 = 4$ ：真
(2) 素数は無数にある． ：真
(3) $1 + 2 = 4$ ：偽
(4) ゴールドバッハの予想
「2よりも大きいどんな偶数も2つの素数の和として表される」
：現時点で真偽はわからないが，真か偽かどちらかであることは確定している．→　命題と見なす．

命題ではない例

(5) $x < 5$
→　変数を含んだ文は真偽を述べることができないので命題でない．

原子論理式 (atomic proposition)：**これ以上分解できない命題の最小単位**

(例)　⊥ (falsity: **常に偽である命題**)

原子論理式を命題記号(proposition symbol)**として以下のように記号化する.**

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \Lambda$$

これらの具体的な内容については考えない.

原子論理式を論理操作で結合することにより, 新しく複合命題 (compound proposition) **を作ることができる.**

結合子(connective): **基本となる論理操作を形式化したもの**

結合子

$\wedge$ ：**論理積** (and) , conjunction

$\vee$ ：**論理和** (or), disjunction

$\rightarrow$ ：**含意** (if…, then…), implication

$\neg$ ：**否定** (not), negation

$\leftrightarrow$ ：**同値**, equivalence

$$p_0 \rightarrow p_1 \equiv \neg p_0 \vee p_1$$

命題の例2

(1) 太郎君は日本人である.
(2) 花子さんは日本人である.
(3) 太郎君と花子さんは日本人である.

(1) と (2) は原子論理式で, p_1, p_2 と表す.

(3) は複合命題で,

$$p_1 \wedge p_2$$

である.

<u>定義１．１．２（論理式の帰納的定義）</u>
命題の集合*PROP*は，以下の性質を満足する最小の集合Xである．

(i) $p_i \in X\,(\text{for} \quad \forall i), \quad \bot \in X,$

(ii) $\varphi, \psi \in X \Rightarrow \quad (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in X,$

(iii) $\varphi \in X \Rightarrow \quad (\neg \varphi) \in X.$

$p_i (i \in N)$： **原子論理式** $\varphi, \quad \psi$ ：**論理式（複合命題）**

具体例

$$(p_7 \to p_0), \quad ((\bot \vee p_{32}) \wedge (\neg p_2)) \in PROP.$$

$$p_1 \leftrightarrow p_7, \quad \neg\neg\bot, ((\to \wedge \notin PROP.$$

$\neg\neg\bot \notin PROP$ の証明

$\neg\neg\bot \in X$ として，
Xは定義1.1.2の(i), (ii), (iii) を満足するものとする．

$Y = X - \{\neg\neg\bot\}$ とすると，
Yも (i), (ii), (iii) を満足する（これを以下で示す）．このとき

$$PROP \subseteq Y \Rightarrow \neg\neg\bot \notin PROP$$

となる．

(1) Yが (i) を満足することを示す．
X は条件(i) を満足するので

$$\bot, p_i \in X$$

$\bot \neq \neg\neg\bot, p_i \neq \neg\neg\bot$ であるから

$$\bot, p_i \in Y$$

(2) Yが (ii) を満足することを示す.

$\varphi, \psi \in Y$ とすると $\varphi, \psi \in X$ （ $Y \subset X$ だから）

従って

$$(\varphi \square \psi) \in X \ , (\varphi \square \psi) \neq \neg\neg\bot \Rightarrow \ (\varphi \square \psi) \in Y$$

$$\square : \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

(3) Yが (iii) を満足することを示す.

$\varphi \in Y$ とすると $\varphi \in X$

従って

$$(\neg\varphi) \in X, (\neg\varphi) \neq \neg\neg\bot \Rightarrow (\neg\varphi) \in Y$$

（$\neg\neg\bot$ は ( ) を含んでいないことに注意）

XはYよりも大きい集合なので, (i), (ii), (iii) を満足する最小の集合とならない. 従って, $\neg\neg\bot \notin PROP$

<u>定理1．1．3</u>　論理式の構造的帰納法 (Induction Principle)

A を論理式の性質とし，以下の(i), (ii), (iii) を満足するとき

$A(\varphi), \forall \varphi \in PROP$ 即ち，全ての φ に対して性質 A が成立する．

(i) $A(p_i)$, for $\forall i$, and $A(\bot)$

(ii) $A(\varphi), A(\psi) \Rightarrow A((\varphi \Box \psi))$

(iii) $A(\varphi) \Rightarrow A((\neg \varphi))$

<u>証明</u>

$X = \{\varphi \in PROP \mid A(\varphi)\}$ とする．

X は定義1.1.2の(i), (ii), (iii) を満足することを示す．

(1) $A(p_i),\ for \quad \forall i \quad and \quad A(\bot)$ **なので**

$$p_i \in X\,(\text{for} \quad \forall i), \quad \bot \in X$$

(2) $A(\varphi), A(\psi) \quad \Rightarrow \quad A((\varphi \Box \psi))$ **なので**

$$\varphi, \psi \in X \Rightarrow \quad (\varphi \Box \psi) \in X$$

(3) $A(\varphi) \quad \Rightarrow \quad A((\neg \varphi))$ **なので**

$$\varphi \in X \Rightarrow \quad (\neg \varphi) \in X$$

従って， $PROP \subseteq X$

また, X **の定義から** $X \subseteq PROP$ **であるから, 結局**

$$X = PROP$$

即ち $A(\varphi), \forall \varphi \in PROP$ **が証明できた.**

<u>定義１．１．４</u>　構成系列 (formation sequence)

以下の条件を満足する系列 $\varphi_0, \quad \Lambda \quad , \varphi_n$ **を** φ **の構成系列という．**

$\varphi_n = \varphi$　　$\forall i \leq n$ **に対して** φ_i **は原子論理式，または**

$\varphi_i = (\varphi_j \square \varphi_k) \quad for \quad \exists j, \exists k < i$ **，または**

$\varphi_i = (\neg \varphi_j) \quad for \quad \exists j < i$

具体例　$(\neg p_3)$ **の構成系列**

(i)　$\bot, p_2, p_3, (\bot \vee p_2), (\neg(\bot \vee p_2)), (\neg p_3)$

(ii)　$p_3, (\neg p_3)$

<u>定理1．1．5</u> *PROP* **に含まれる全ての論理式は構成系列を持つ．**

<u>証明</u>　論理式の構造的帰納法を用いて証明する．

(i) φ **が原子論理式の場合，** φ **という構成系列を持つ．**

(ii) φ **と** ψ **が，** $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ **と，** $\psi_0, \ldots, \psi_m$ **という構成系列を持つとすると**

$(\varphi \Box \psi)$ **は** $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi_0, \ldots, \psi_m, (\varphi \Box \psi)$ **という構成系列を持つ．**

(iii) φ **が，** $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ **という構成系列を持つとすると**

$(\neg\varphi)$ **は** $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, (\neg\varphi)$ **という構成系列を持つ．**

従って，　構造的帰納法により， *PROP* **に含まれる全ての論理式は構成系列を持つことが証明された．**

演習問題1

（1－1） *PROP* に属す全ての論理式はかっこ（右かっこ，左かっこ）を偶数個持つことを，論理式の構造的帰納法を用いて証明せよ．