数理論理学 (第14回)

2005.12.13

府川　和彦

2．3　Similarity Type

similarity type

$$(r_1, \Lambda\ , r_n; a_1, \Lambda\ , a_m; k)$$

に対するアルファベットを以下のように定義する．ただし

$$r_i \geq 0, \quad a_i \geq 0$$

1．述語記号： $P_1, \Lambda\ , P_n, \dot{=}$ ← **“= ”を表す**

2．関数記号： $f_1, \Lambda\ , f_m$

3．定数記号： $c_1, \Lambda\ , c_k$

4．変数： x_0, x_1, x_2, Λ

5．結合子: $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow, \perp, \exists, \forall$

6．補助記号： (,)

similarity type が同じならば，アルファベットは等しい．

例1　実数体 $(R,+,*,^{-1},0,1)$ **ここで** R **は実数の集合**

similarity type **は**

$$(-;2,2,1;2)$$

この similarity type **に対するアルファベットは**

関係がないときは $\dot{=}$ **だけ**

1．述語記号： $\dot{=}$

2．関数記号： $f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2),\ f_3(x_1)$

3．定数記号： c_1, c_2

4．変数，結合子，補助記号

例2　自然数の順序集合 $(N, <)$ **の** similarity type **は**

$$(2;-;0)$$

この similarity type **に対するアルファベットは**

2項関係を表す述語

1. 述語記号： $P_1(x_1, x_2), \doteq$

2. 変数, 結合子, 補助記号

<u>定義2．3．1</u>　以下の条件を満たす最小の集合 X **を** $TERM$ **と定義する.**

1.　$c_i \in X$ **かつ** $x_i \in X$

2.　$t_1, \Lambda\ , t_{a_i} \in X$ **ならば** $f_i(t_1, \Lambda\ , t_{a_i}) \in X$

$TERM$ **の各要素を** $term$ **と呼ぶ.**

<u>定義2．3．2</u>　以下の条件を満たす最小の集合 X **を** $FORM$ **と定義する．**

1．　$\perp \in X$　．　　$P_i \in X \quad if \quad r_i = 0$

$t_1, \Lambda\ , t_{r_i} \in TERM$　**なら**　$P_i(t_1, \Lambda\ , t_{r_i}) \in X$

$t_1, t_2 \in TERM$　**なら**　$t_1 \doteq t_2 \in X$

2．　$\varphi, \psi \in X$　**なら**　$(\varphi \square \psi) \in X$

ただし　$\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

3．　$\varphi \in X$　**なら**　$(\neg \varphi) \in X$

4．　$\varphi \in X$　**なら**　$((\forall x_i)\varphi), ((\exists x_i)\varphi) \in X$

1．の要素を atom **と呼ぶ．**
$FORM$ **の各要素を** formula **と呼ぶ．**

c_i, x_i ＋ **関数記号** ＝ term

term + {**述語記号, 結合子, ∀, ∃**} = formula

命題記号 + **結合子** = **(命題) 論理式**

例3 similarity type (2;2,1;1) **のアルファベットは**

- **述語記号**: $P_1(x_1, x_2), \doteq$
- **関数記号**: $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1)$
- **定数記号**: c_1
- **変数, 結合子, 補助記号**

例4 similarity type (2;2,1;1) **に対する** term **の例**

$$t_1 := x_0$$

$$t_2 := f_1(x_1, x_2)$$

$$t_3 := f_1(c_1, c_1)$$

$$t_4 := f_2(x_0)$$

$$t_5 := f_1(f_2(f_1(x_2, c_1)), f_2(x_1))$$

例5 similarity type (2;2,1;1) **に対する** formula **の例**

$$\varphi_1 := x_0 \doteq x_2$$

$$\varphi_2 := P_1(f_2(x_5), c_1)$$

$$\varphi_3 := x_0 \doteq x_1 \to x_1 \doteq x_0$$

$$\varphi_4 := (\forall x_0)(\exists x_1)(x_0 \doteq x_1 \to \neg P_1(x_0, x_1))$$

$$\varphi_5 := (\forall x_0)(\exists x_1)(f_1(x_0, x_1) \doteq c_1)$$

補題　2．3．3： *TERM* に関する構造的帰納法

$A(t)$ を *term* t に関する性質とする．以下の条件を満足するなら
$\forall t \in TERM$ に対して $A(t)$ が成り立つ．

1. $\forall c_i A(c_i)$　(全ての定数記号について成立)

2. $\forall x_i A(x_i)$　(全ての変数について成立)

3. $\forall f[A(t_1), A(t_2), \Lambda\ A(t_n) \Rightarrow A(f(t_1, t_2 \Lambda\ t_n))]$

   (全ての関数記号について成立)

証明

$X = \{\varphi \in TERM \mid A(\varphi)\}$ とする．

X は定義2．3．1の (1) と (2) を満足するので　$TERM \subseteq X$

従って

$$A(t), \forall t \in TERM$$

補題　２．３．４： *FORM* に関する構造的帰納法

$A(\varphi)$ を *formula* φ に関する性質とする．以下の条件を満足するなら $\forall \varphi \in FORM$ に対して $A(\varphi)$ が成り立つ．

1. 全ての atom φ について $A(\varphi)$ が成り立つ．
2. $A(\varphi), A(\psi) \Rightarrow A(\varphi \square \psi)$
3. $A(\varphi) \Rightarrow A(\neg \varphi)$
4. $A(\varphi) \Rightarrow A((\forall x_i)\varphi), A((\exists x_i)\varphi), \forall i$

証明

補題２．３．３の証明と同様

∀あるいは∃がついている変数は<u>束縛変数</u>，ついていない変数は<u>自由変数</u>と呼ばれる．

<u>具体例</u>

$$\varphi_3 := x_0 \doteq x_1 \to x_1 \doteq x_0$$

$$\varphi_4 := (\forall x_0)(\exists x_1)(x_0 \doteq x_1 \to \neg P_1(x_0, x_1))$$

において x_0, x_1 **は，** φ_3**の自由変数，** φ_4**の束縛変数である．**

<u>定義２．３．６</u> $t \in TERM$ **の自由変数の集合** $FV(t)$ **は以下のように定義される．**

(i) $$FV(x_i) = \{x_i\}$$

$$FV(c_i) = \emptyset$$

(ii) $$FV(f(t_1, \Lambda, t_n)) = FV(t_1) \cup \Lambda \cup FV(t_n)$$

<u>定義2．3．7</u> $\varphi \in FORM$ **の自由変数の集合** $FV(\varphi)$ **は以下のように定義される．**

(i) $FV(P(t_1, \Lambda\ , t_p)) = FV(t_1) \cup \Lambda\ \cup FV(t_p)$

$FV(t_1 \doteq t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

$FV(\perp) = FV(p_i) = \emptyset$ $\qquad$ p_i: **命題記号**

(ii) $FV(\varphi \square \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$

$FV(\neg \varphi) = FV(\varphi)$

(iii) $FV(\forall x_i \varphi) = FV(\exists x_i \varphi) = FV(\varphi) - \{x_i\}$

<u>定義２．３．７‘</u> $\varphi \in FORM$ **の束縛変数の集合** $BV(\varphi)$ **は以下のように定義される．**

(i) $BV(P(t_1, \Lambda\ , t_p)) = BV(t_1) \cup \Lambda\ \cup BV(t_p)$

$BV(t_1 \dot{=} t_2) = BV(t_1) \cup BV(t_2)$

$BV(\perp) = BV(p_i) = \emptyset$ $\qquad$ p_i: **命題記号**

(ii) $BV(\varphi \Box \psi) = BV(\varphi) \cup BV(\psi)$

$BV(\neg \varphi) = BV(\varphi)$

(iii) $BV(\forall x_i \varphi) = BV(\exists x_i \varphi) = BV(\varphi) \cup \{x_i\}$

具体例1

$$\varphi_3 := x_0 \doteq x_1 \to x_1 \doteq x_0$$

$$\varphi_4 := (\forall x_0)(\exists x_1)(x_0 \doteq x_1 \to \neg P_1(x_0, x_1))$$

$$FV(\varphi_3) = \{x_0, x_1\} \qquad BV(\varphi_3) = \emptyset$$

$$FV(\varphi_4) = \emptyset \qquad BV(\varphi_4) = \{x_0, x_1\}$$

具体例2

$$\varphi := \forall x_1(x_1 \doteq x_2) \to P_1(x_1)$$

$$FV(\varphi) = FV(\forall x_1(x_1 \doteq x_2)) \cup FV(P_1(x_1)) = \{x_1, x_2\}$$

$$BV(\varphi) = BV(\forall x_1(x_1 \doteq x_2)) \cup BV(P_1(x_1)) = \{x_1\}$$

$FV(\varphi) \cap BV(\varphi) \neq \emptyset$ （FV と BV に完全に分離できない例）

(i) $FV(t) = \emptyset$ **のとき** term t **は<u>閉じている</u>という.**

$TERM_c$ = **閉じている** *term* **の集合**

(ii) $FV(\varphi) = \emptyset$ **のとき** formula φ **は<u>閉じている</u>という.**

sentence = **閉じている** formula
SENT = sentence **の集合**

<u>定義２．３．９</u> term **の中の変数** x **に** *term* t **を代入する操作.**

(i) $$y[t/x] := \begin{cases} y & \text{if} \quad y \not\equiv x \\ t & \text{if} \quad y \equiv x \end{cases}$$

$$c[t/x] := c$$

x **と** y **は**
同じ変数という意味

(ii) $$f(t_1, \Lambda\ , t_p)[t/x] := f(t_1[t/x], \Lambda\ , t_p[t/x])$$

<u>定義2．3．10</u> *formula* **の中の変数** *x* **に** *term t* **を代入する操作.**

(i) $\bot[t/x] := \bot$

$P[t/x] := P$ for propositions P

$P(t_1, \Lambda\ , t_p)[t/x] := P(t_1[t/x], \Lambda\ , t_p[t/x])$

$(t_1 \doteq t_2)[t/x] := t_1[t/x] \doteq t_2[t/x]$

(ii) $(\varphi \Box \psi)[t/x] := \varphi[t/x] \Box \psi[t/x]$

$(\neg\varphi)[t/x] := \neg\varphi[t/x]$

(iii) $$(\forall y \varphi)[t/x] := \begin{cases} \forall y \varphi[t/x] & \text{if} \quad x \not\equiv y \\ \forall y \varphi & \text{if} \quad x \equiv y \end{cases}$$

$$(\exists y \varphi)[t/x] := \begin{cases} \exists y \varphi[t/x] & \text{if} \quad x \not\equiv y \\ \exists y \varphi & \text{if} \quad x \equiv y \end{cases}$$

具体例

$$t_3 := f_1(c_1, c_1)$$

$$\varphi_1 := x_0 \doteq x_2$$

$$\varphi_5 := (\forall x_0)(\exists x_1)(f_1(x_0, x_1) \doteq c_1)$$

$$\varphi_1[t_3 / x_0] := f_1(c_1, c_1) \doteq x_2$$

$$\varphi_5[t_3 / x_0] := \varphi_5$$

束縛変数には代入しない.

<u>定義2．3．11</u> *formula* **の中の命題記号** $ **に** *formula* φ **を代入する操作.**

(i) $$\sigma[\varphi/\$] := \begin{cases} \sigma & \text{if} \quad \sigma \not\equiv \$ \\ \varphi & \text{if} \quad \sigma \equiv \$ \end{cases} \quad \text{for} \quad \text{atomic} \quad \sigma$$

(ii) $$(\sigma_1 \Box \sigma_2)[\varphi/\$] := \sigma_1[\varphi/\$] \Box \sigma_2[\varphi/\$]$$

$$(\neg\sigma_1)[\varphi/\$] := \neg\sigma_1[\varphi/\$]$$

$$(\forall y \sigma)[\varphi/\$] := \forall y \cdot \sigma[\varphi/\$]$$

$$(\exists y \sigma)[\varphi/\$] := \exists y \cdot \sigma[\varphi/\$]$$

例1 $\exists x(y < x)[x / y] = \exists x(x < x)$

左辺は正しい場合があるが，右辺は明らかに正しくない．
これは代入した変数が束縛されてしまったために起きた．

<u>このような代入は禁止すべきである</u>．

例2

(i) $\exists x_3 P(x_0, x_3)$

の中の x_0 **に** x_2 **を代入しても** x_2 **は束縛されない．**

(ii) $\exists x_1 P(x_0, x_3)$

の中の x_0 **に** $f(x_0, x_1)$ **を代入すると** $f(x_0, x_1)$ **の中の** x_1 **が束縛される．**

<u>定義2．3．12</u>　以下の条件が成立つとき， formula φ **の中の** x **に** term t **を代入した後，** t**中の変数は束縛されないという．**

(i)　φ **は** atom

(ii)　$\varphi := (\varphi_1 \square \varphi_2)$　**の場合で，**

φ_1 , φ_2**の中の** x **に** term t **を代入した後，** t**中の変数は束縛されないとき**

(iii)　$\varphi := \neg \varphi_1$ **の場合で，**

φ_1 **の中の** x **に** term t **を代入した後，** t**中の変数は束縛されないとき**

(iv)　$\varphi := \exists y \psi$　or　$\varphi := \forall y \psi$ **の場合で，**

$y \notin FV(t)$　**かつ**

ψ**の中の**x **に** term t **を代入した後，** t**中の変数は束縛されないとき．ただし，** $x \neq y$