

2010年後期 通信伝送工学

第10回 基底帯域デジタル伝送3 雑音による誤り

阪口 啓 <sakaguchi@mobile.ee.titech.ac.jp>

2011年1月18日

講義スケジュール後半

	日付	教科書	内容
第7回	11月30日	1.3 – 1.7	確率過程：定常過程、線形システム
	12月7日		休講
第8回	12月14日	3.1 – 3.4	基底伝送1：パルス伝送、スペクトル
第9回	12月21日	4.2	基底伝送2：整合フィルタ、最適受信機
第10回	1月18日	1.8 – 1.9 4.3	基底伝送3：雑音による誤り
第11回	1月25日	5.1 – 5.3	帯域伝送1：BPSKの変復調
第12回	2月1日	6.1 – 6.4	帯域伝送2：QPSKの変復調
	2月8日		期末試験

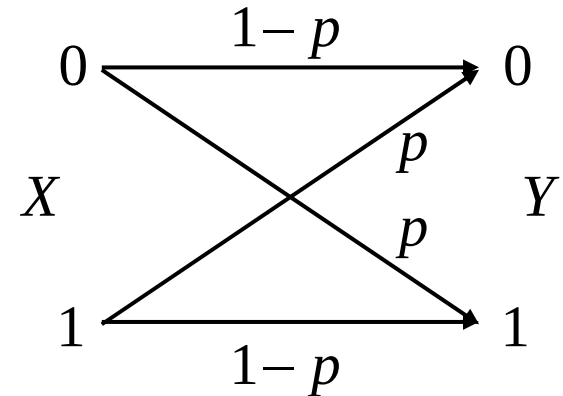
前回の復習

■ 二元対称通信路

相互情報量

$$I(X;Y) = H(X) - H(p) \leq 1 - H(p) = C$$

通信路容量を達成する条件: $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$



■ パルス伝送

パルス信号の振幅に情報を乗せる通信方式

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n g(t - nT_b)$$

メッセージ信号

パルス信号

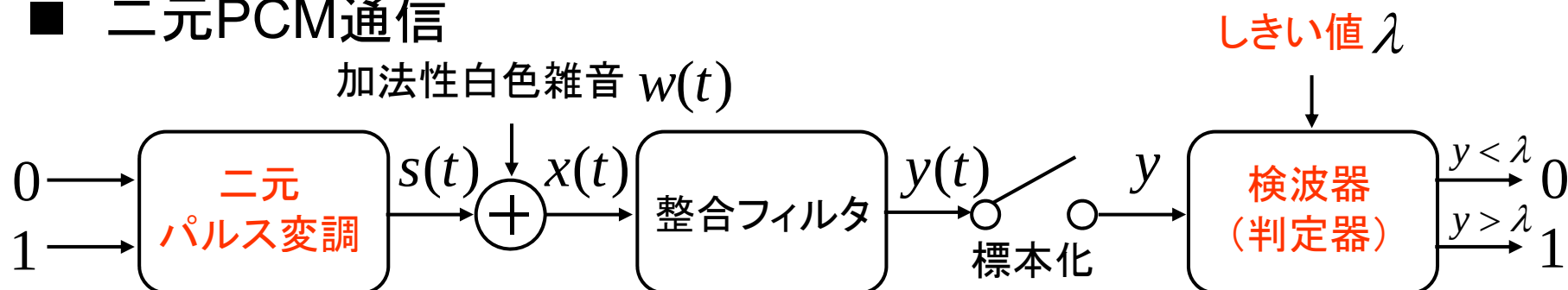
■ 整合フィルタ

受信SNRを最大化する線形受信フィルタ

$$h_{\text{opt}}(t) = kg(T - t)$$

二元PCM通信

■ 二元PCM通信



■ 二元PCM変調

パルス振幅変調

矩形パルス信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n g(t - nT_b)$$

二元(バイナリ)メッセージ

$$m_n = \begin{cases} 1, & \text{symbol 1} \\ -1, & \text{symbol 0} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T_b \\ A/2, & t = 0, t = T_b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ビットレート $r_b = 1/T_b$

整合フィルタの信号出力

■ 整合フィルタ入力

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t), & \text{symbol 1} \\ -A + w(t), & \text{symbol 0} \end{cases}$$

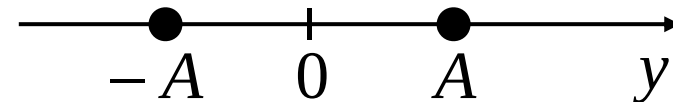
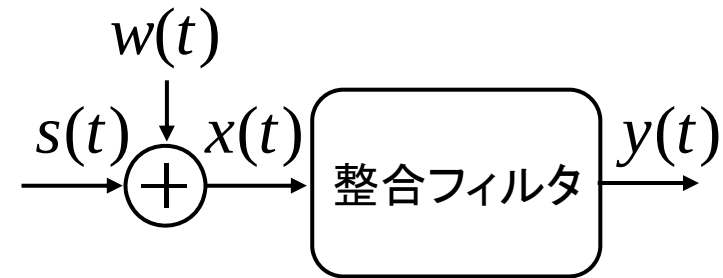
$$0 \leq t \leq T_b$$

■ 整合フィルタ出力

$$h_{\text{opt}}(t) = kg(T_b - t) \quad k = \frac{1}{AT_b}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y = y(T_b) = \pm A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} w(t) dt$$



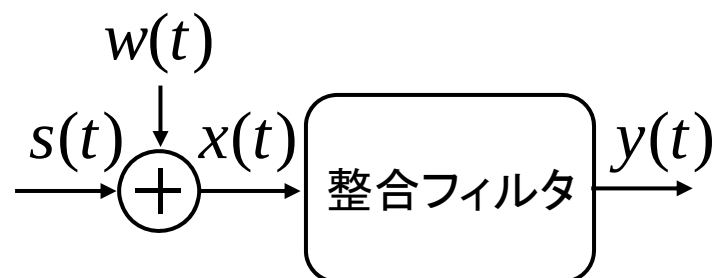
整合フィルタの雑音出力

■ 整合フィルタ出力

$$y = y(T_b) = \pm A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} w(t) dt = \pm A + n$$

■ 雑音スペクトル密度

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}$$



$$S_N(f) = |H_{\text{opt}}(f)|^2 S_w(f) = \frac{N_0}{2} |H_{\text{opt}}(f)|^2$$

■ 雑音電力

$$E[n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\text{opt}}(f)|^2 df = \frac{N_0}{2T_b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_{\text{opt}}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(AT_b)^2} g(T_b - t) dt = \frac{1}{T_b}$$

整合フィルタ出力の確率密度関数

■ 整合フィルタ出力の確率密度関数

ガウス過程の整合フィルタ出力はガウス過程

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

$$\text{平均: } \mu_Y = E[y] = \pm A \quad \text{分散: } \sigma_Y^2 = \frac{N_0}{2T_b}$$

■ 受信信号の条件付き確率

$$f_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \exp\left(-\frac{(y + A)^2}{N_0/T_b}\right) \quad \text{シンボル0を送信した場合}$$

$$f_Y(y|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \exp\left(-\frac{(y - A)^2}{N_0/T_b}\right) \quad \text{シンボル1を送信した場合}$$

雑音による誤り

- しきい値 λ を用いた受信信号の検波(送信シンボルの判定)

$$\hat{m} = \begin{cases} 1, & \text{symbol 1, } y > \lambda \\ -1, & \text{symbol 0, } y < \lambda \end{cases}$$

- シンボル0をシンボル1に誤って判定する確率

$$\begin{aligned} p_{10} &= P(y > \lambda | 0) = \int_{\lambda}^{\infty} f_Y(y | 0) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y + A)^2}{N_0/T_b}\right) dy \end{aligned}$$

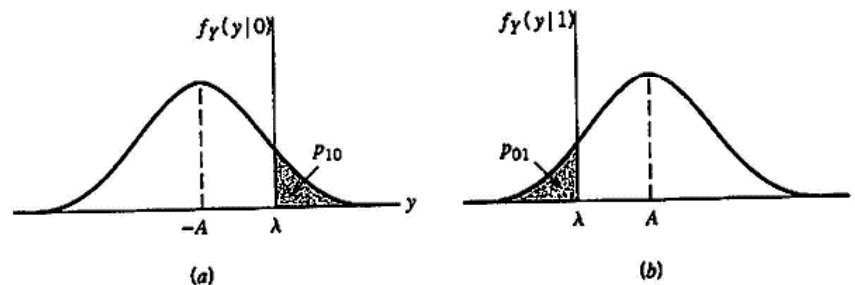


FIGURE 4.5 Noise analysis of PCM system. (a) Probability density function of random variable Y at matched filter output when 0 is transmitted. (b) Probability density function of Y when 1 is transmitted.

誤り補関数

■ 誤り補関数

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-z^2) dz$$

■ 誤り補関数の上界

$$\operatorname{erfc}(u) < \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}u}$$

■ 二元PCM通信の誤り

$$z = \frac{y + A}{\sqrt{N_0/T_b}}$$

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(A+\lambda)/\sqrt{N_0/T_b}}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

誤り関数

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(u) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-z^2) dz \\ &= 1 - \operatorname{erfc}(u) \end{aligned}$$

平均誤り率

■ シンボル誤り率

$$p_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) \quad p_{01} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

■ 平均誤り率

p_0 : シンボル0の事前確率

p_1 : シンボル1の事前確率

$$\begin{aligned} P_e &= p_0 p_{10} + p_1 p_{01} \\ &= \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) + \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) \end{aligned}$$

判定しきい値の最適化

■ 平均誤り率

$$P_e(\lambda) = \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) + \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

■ 誤り補関数の微分

$$\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{erfc}(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)$$

■ 判定しきい値の最適化

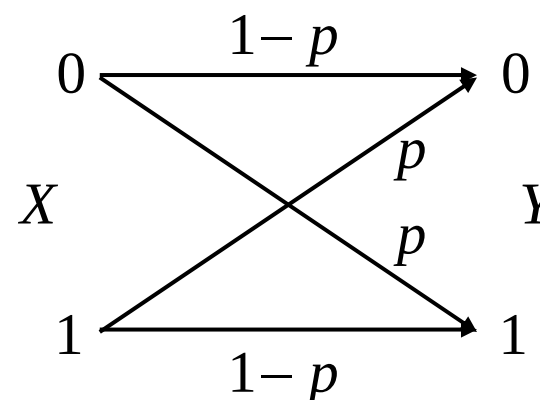
$$\frac{\partial P_e(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{N_0}{4AT_b} \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

二元对称通信路

■ 二元对称通信

$$p_1 = p_0 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{N_0}{4AT_b} \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = 0$$



■ 平均誤り率

$$P_e = \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) + \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

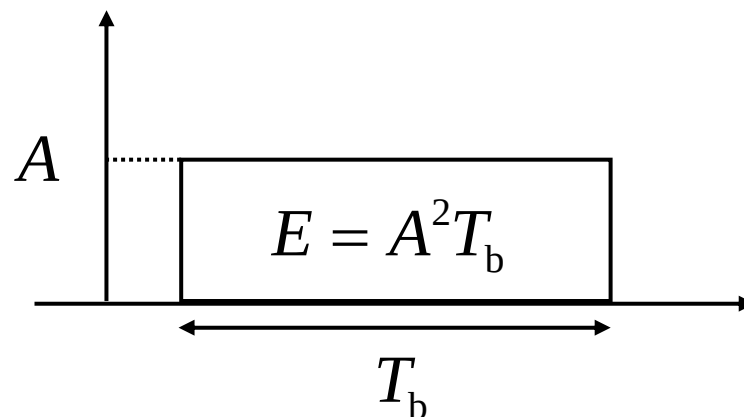
E_b/N_0

■ 二元対称通信の平均誤り率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

■ パルス信号のエネルギー

$$E_b = A^2 T_b$$



■ 二元対称通信の平均誤り率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

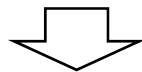
二元PCMの誤り率

■ 二元対称通信の誤り率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

■ 誤り率の上界

$$P_e < \frac{\exp(-E_b/N_0)}{2\sqrt{\pi E_b/N_0}}$$



誤りは E_b/N_0 に対して
指数関数的に変化

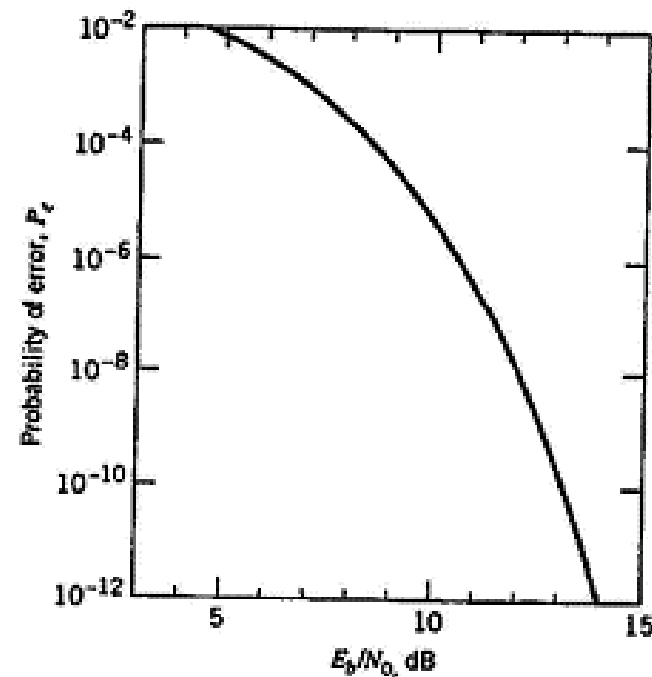


FIGURE 4.6 Probability of error in a PCM receiver.

まとめ

1. 二元PCM通信の雑音による誤り

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{N_0/T_b}\right) dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

2. 平均誤り率と判定しきい値

$$P_e = p_0 p_{10} + p_1 p_{01} = \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) + \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$
$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{N_0}{4AT_b} \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

3. 二元対称通信路の平均誤り率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

教科書対応表

	教科書(旧)	教科書(新)	内容
第1回	Preview	Chapter 1	通信伝送のモデルと具体例
第2回	9.1 - 9.3	10.1 - 10.3	情報理論の基礎1: 情報源符号化
第3回	9.4	10.4 - 10.5	情報理論の基礎2: データ圧縮
第4回	9.5 - 9.7	10.6 - 10.7	情報理論の基礎3: 通信路容量
第5回	9.8	10.8	情報理論の基礎4: 通信路符号化
第6回	10.1 - 10.3	10.10 - 10.11	情報理論の基礎5: 誤り訂正符号
第7回	1.3 - 1.7	5.5 - 5.8	確率過程: 定常過程、線形システム
第8回	3.1 - 3.4	7.1 - 7.6	基底伝送1: パルス伝送、スペクトル
第9回	4.2	8.2	基底伝送2: 整合フィルタ、最適受信機
第10回	1.8 - 1.9, 4.3	5.9 - 5.10, 8.3	基底伝送3: 雑音による誤り
第11回	5.1 - 5.3	9.1 - 9.3	帯域伝送1: BPSKの変復調
第12回	6.1 - 6.4	9.4	帯域伝送2: QPSKの変復調