2010年後期
通信伝送工学

第7回　線形システム

阪口 啓 <sakaguchi@mobile.ee.titech.ac.jp>

2010年11月30日

講義スケジュール後半

	日付	教科書	内容
第7回	11月30日	1.3 – 1.7	確率過程：定常過程、線形システム
	12月7日		休講
第8回	12月14日	3.1 – 3.4	基底伝送1：パルス伝送、スペクトル
第9回	12月21日	4.2	基底伝送2：整合フィルタ、最適受信機
第10回	1月11日	1.8 – 1.9 4.3	基底伝送3：雑音による誤り
第11回	1月18日	5.1 – 5.3	帯域伝送1：BPSKの変復調
第12回	1月25日	6.1 – 6.4	帯域伝送2：QPSKの変復調
	2月8日		期末試験

前回の復習

- 通信路の遷移行列

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} p(y_1 \mid x_0) & \cdots & p(y_{K-1} \mid x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1 \mid x_{J-1}) & \cdots & p(y_{K-1} \mid x_{J-1}) \end{bmatrix}$$

- 二元対称通信路の通信路符号化定理

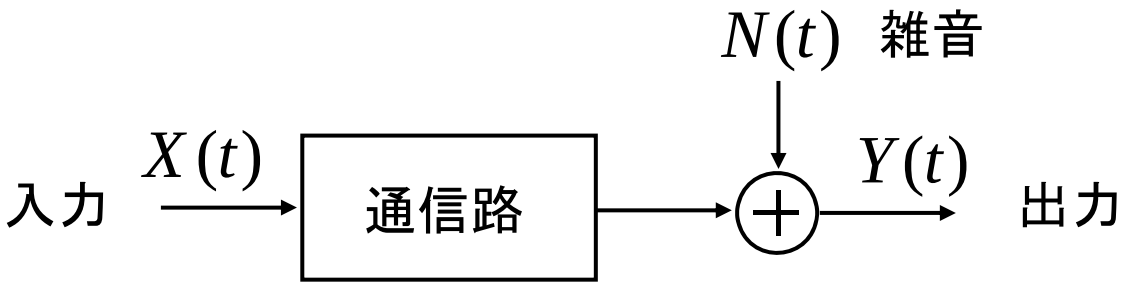
$$r = k/n \leq C$$

- 通信路符号化

  k ビットデータと $n-k$ ビットパリティによる組織符号

  生成行列を用いた符号化とパリティ検査行列を用いた復号

通信路の例



有線

- 電気信号

  電話（ツイストペアケーブル）

- 光信号

  インターネット（光ファイバ）

無線

- 音声信号

  会話（音波）

- 電波信号

  携帯電話（電磁波）

線形時不変システム

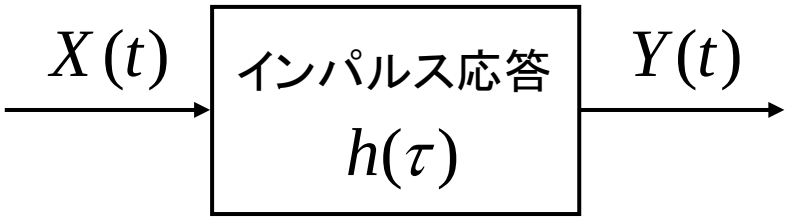
■ インパルス応答

入力 $X(t)=\delta(t)$

のときの出力 $h(t)=Y(t)$

時不変 $h(\tau,t)=h(\tau)$

通信路



■ 入出力特性

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1$$

畳込み積分 ⇕

$$\tilde{Y}(f)=H(f)\tilde{X}(f)$$

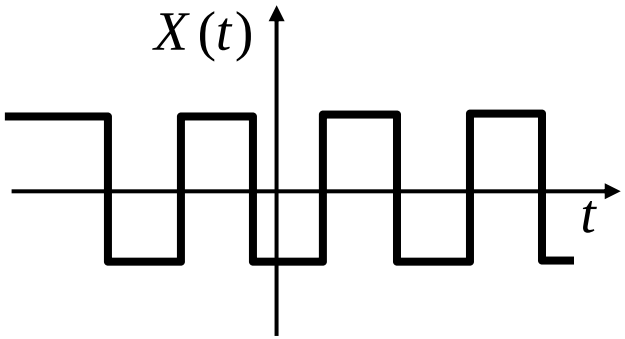
$$\tilde{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$\tilde{Y}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

ランダム過程の伝送

■ ランダムな入力信号の統計値



平均値: $\mu_X = \mathrm{E}[X(t)]$

自己相関: $R_X(\tau) = \mathrm{E}[X(t+\tau)X(t)]$

電力: $R_X(0) = \mathrm{E}[X^2(t)] = \sigma_X^2$

■ 出力信号の統計値

平均値: $\mu_Y = \mathrm{E}[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\mathrm{E}[X(t-\tau_1)]\mathrm{d}\tau_1$

$$= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 = \mu_X H(0)$$

直流応答

自己相関: $R_Y(\tau) = \mathrm{E}[Y(t+\tau)Y(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau-\tau_1+\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

電力スペクトル密度

■ 出力電力

$$\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}f\left|H(f)\right|^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau}_{\text{入力電力スペクトル密度}} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 S_X(f)\mathrm{d}f$$

■ 自己相関と電力スペクトル密度

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$ 周波数軸上の特徴量

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$ 時間軸上の特徴量

二元パルス伝送の例（自己相関）

■ 二元パルス信号

0, 1 のバイナリ信号（発生確率はランダム）

⇩

振幅 -*A*, +*A* パルス幅 *T* の信号で伝送

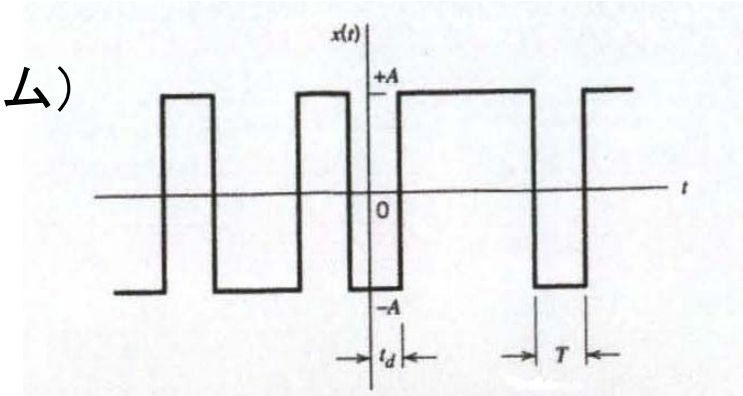


FIGURE 1.6 Sample function of random binary wave.

■ 自己相関

$|\tau| \geq T$ のとき相関ゼロ

$|\tau| < T$ のとき $\left(1 - {|\tau|}/{T}\right)$ の確率で重複

⇩

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$

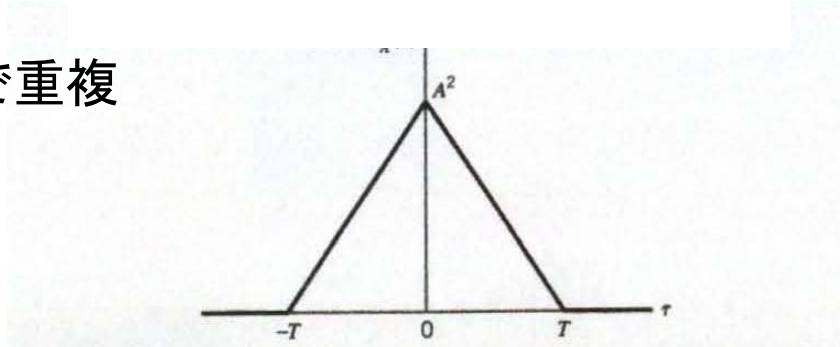


FIGURE 1.7 Autocorrelation function of random binary wave.

二元パルス信号の例（電力スペクトル）

■ 自己相関

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$

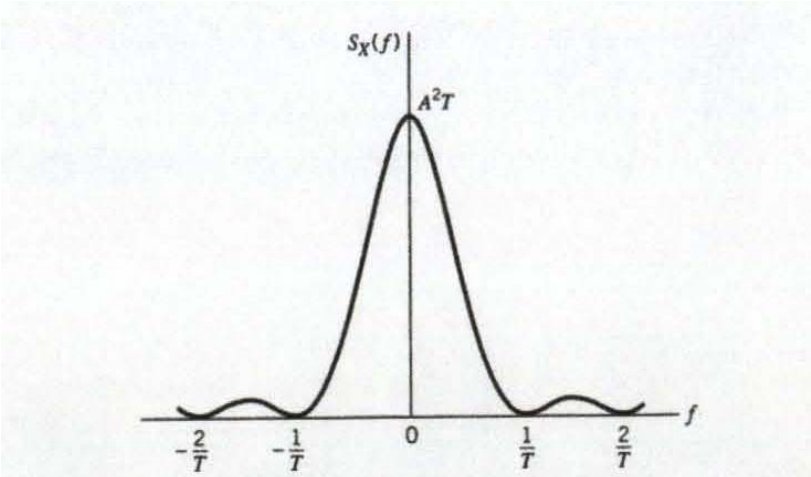


FIGURE 1.11 Power spectral density of random binary wave.

■ 電力スペクトル密度

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= A^2 T \mathrm{sinc}^2(fT)$$

所要帯域幅 $B = 1/T$

1/*T* [bps] のデータレートを実現するために必要な周波数帯域幅

電力スペクトル密度の特徴

■ 電力スペクトル密度の特徴

$$\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(f)\right|^2 S_X(f)\mathrm{d}f \quad \longrightarrow \quad S_X(f) \geq 0$$

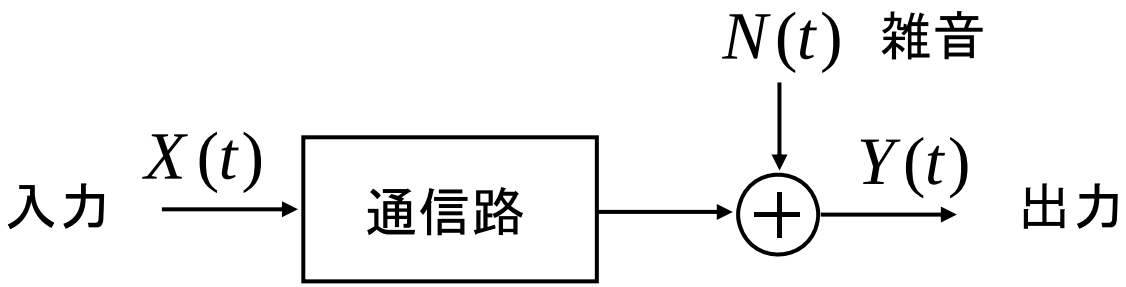
$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad \longrightarrow \quad S_X(-f) = S_X(f)$$

$$p_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\mathrm{d}f}$$

■ 出力電力スペクトル密度

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau = \left|H(f)\right|^2 S_X(f)$$

加法性雑音



■ 熱雑音

受信器導体中の電子のランダム運動によって発生する雑音

多数の電子のランダム運動の和 ⟶ ガウス分布

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \exp\left[-\frac{(n)^2}{2\sigma_N^2}\right]$$

$\sigma_N^2 = kTB$ [W]　k :ボルツマン定数　T :絶対温度　B :帯域幅

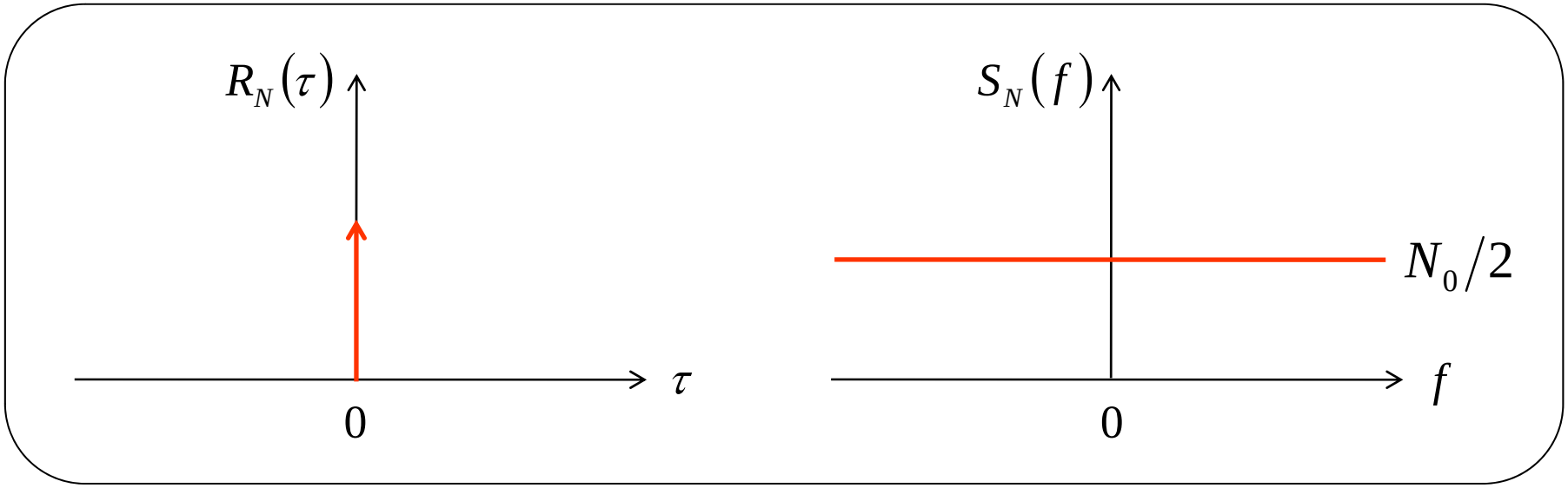
雑音の自己相関

■ 熱雑音の自己相関

$$R_N(\tau) = \underbrace{\frac{N_0}{2}\delta(\tau)}_{N_0 = kT}$$

■ 熱雑音の電力スペクトル密度

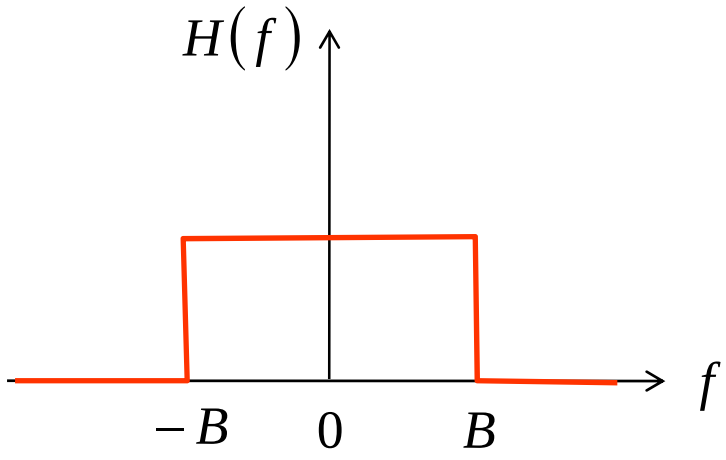
$$\underbrace{S_N(f) = \frac{N_0}{2}}_{\text{白色雑音}}$$



低域通過受信機の雑音電力

■ 低域通過フィルタ

$$H(f)=\begin{cases}1, & -B\le f\le B\\ 0, & |f|>B\end{cases}$$

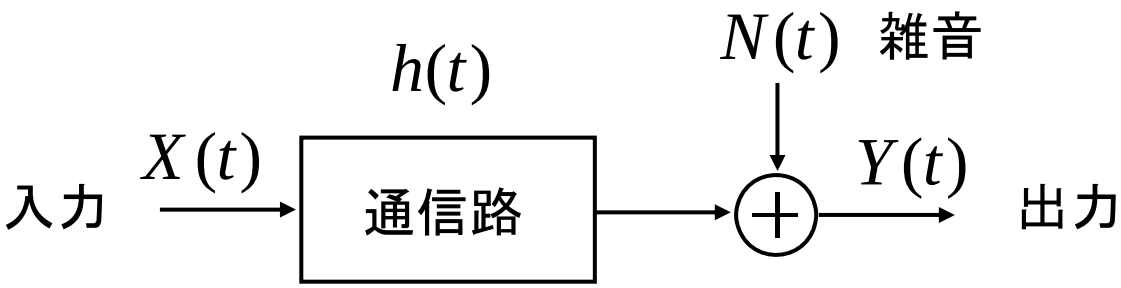


■ 出力雑音電力

$$\mathrm{E}\left[N^2(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 S_N(f)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=2B\frac{N_0}{2}=2B\frac{kT}{2}=kTB=\sigma_N^2$$

通信路の遷移確率



■ 遷移確率

$$p(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu_{y|x})^2}{2\sigma_N^2} \right]$$

$$\mu_{y|x} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

まとめ

1. 通信路のモデル化

線形時不変システム $$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

2. ランダム過程の伝送

自己相関 $$R_X(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

電力スペクトル密度 $$S_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

3. 熱雑音のモデル化

白色雑音 $$R_N(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad S_N(f)=\frac{N_0}{2}$$

付録1（電力スペクトル密度）

■ 出力電力の式変形

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

⇩ 逆フーリエ変換を用いて表現

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi f\tau_1}\mathrm{d}f\,h(\tau_2)R_X(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

⇩ $\tau=\tau_2-\tau_1$ に変数変換

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}f\,H(f)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2 h(\tau_2)e^{j2\pi f\tau_2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}$$

⇩ フーリエ変換の性質

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}f\,H(f)H^*(f)S_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 S_X(f)\mathrm{d}f$$

付録2（フーリエ変換の復習）

■ 矩形パルス

$$g_{\mathrm{r}}(t)=\begin{cases}1, & \text{if } |t|\le T/2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mathrm{r}}(f)=T\,\mathrm{sinc}(fT)=T\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

■ 三角パルス

$$g_{\mathrm{t}}(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{T}, & |t|\le T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mathrm{t}}(f)=T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$g_{\mathrm{t}}(t)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathrm{r}}(\tau)g_{\mathrm{r}}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad G_{\mathrm{t}}(f)=\frac{1}{T}G_{\mathrm{r}}(f)G_{\mathrm{r}}(f)$$