2010年後期
通信伝送工学

第4回　通信路容量

阪口 啓 <sakaguchi@mobile.ee.titech.ac.jp>

2010年10月26日

講義スケジュール前半

	日付	教科書	内容
第1回	10月5日	Preview	通信伝送のモデルと具体例
第2回	10月12日	9.1 – 9.3	情報理論の基礎1：情報源符号化
第3回	10月19日	9.4	情報理論の基礎2：データ圧縮
第4回	10月26日	9.5 – 9.7	情報理論の基礎3：通信路容量
第5回	11月2日	9.8	情報理論の基礎4：通信路符号化
第6回	11月9日	10.1 – 10.3	情報理論の基礎5：誤り訂正符号
	11月16日		中間試験

前回の復習

■ 語頭符号

瞬時に一意に復号可能な符号

■ 最適符号長

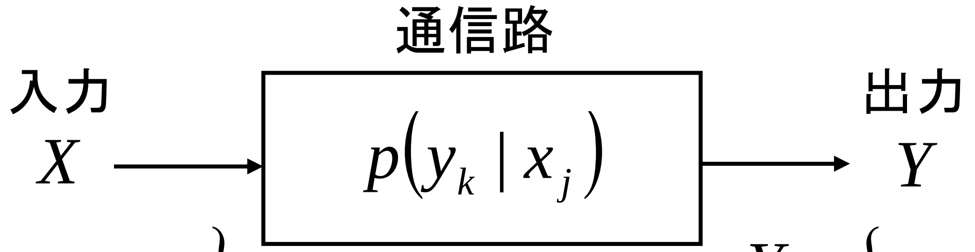
$$H(\zeta) \leq \overline{L} < H(\zeta) + 1$$

■ ハフマン符号

準最適な語頭符号の計算手順

通信路

■ 離散無記憶通信路



$$X=\{x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{J-1}\} \qquad Y=\{y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_{K-1}\}$$

出力は現在の入力のみに依存 ⟶ 無記憶通信路

■ 遷移行列

$$p\left(y_k \mid x_j\right)=P\left(Y=y_k \mid X=x_j\right)$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p\left(y_1 \mid x_0\right) & \cdots & p\left(y_{K-1} \mid x_0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p\left(y_1 \mid x_{J-1}\right) & \cdots & p\left(y_{K-1} \mid x_{J-1}\right) \end{bmatrix}$$

ベイズ則

- 結合確率、条件付確率、事前確率

$$p(x_j, y_k) = P(X = x_j, Y = y_k)$$

$$= p(y_k \mid x_j)\, p(x_j)$$

結合確率

条件付確率

事前確率

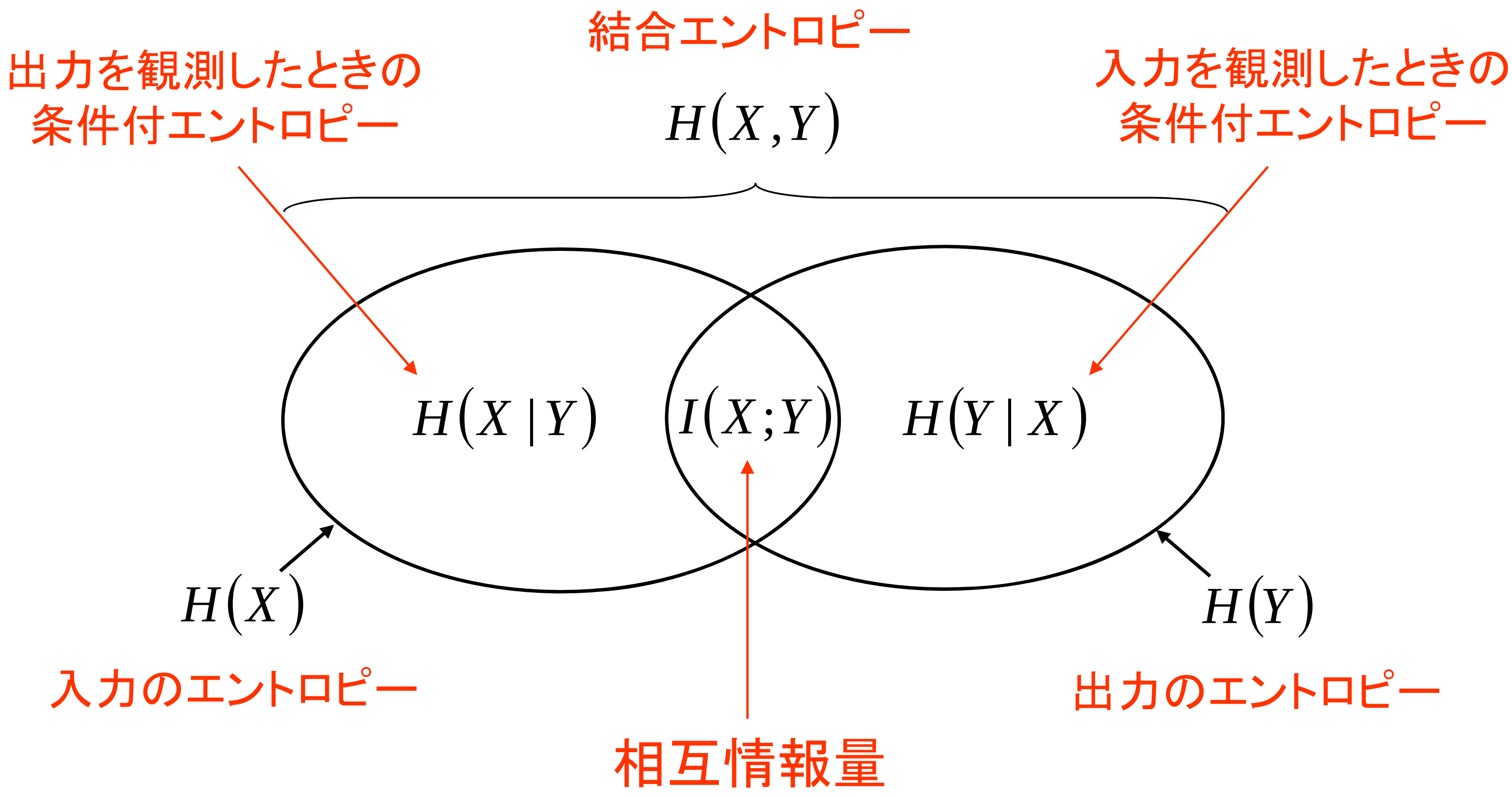
- ベイズ則

$$p(x_j \mid y_k)\, p(y_k) = p(y_k \mid x_j)\, p(x_j)$$

- 周辺確率

$$p(y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(y_k \mid x_j)\, p(x_j)$$

ベン図



結合エントロピー
$H(X,Y)$
出力を観測したときの
条件付エントロピー
入力を観測したときの
条件付エントロピー
$H(X|Y)$
$I(X;Y)$
$H(Y|X)$
$H(X)$
$H(Y)$
入力のエントロピー
出力のエントロピー
相互情報量

結合・条件付エントロピー

- 結合エントロピー

$$H(X,Y) = -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j, y_k)$$

- 条件付エントロピー

$$H(Y \mid X) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) H(Y \mid X = x_j)$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) \sum_{k=0}^{K-1} p(y_k \mid x_j)\log_2 p(y_k \mid x_j)$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k, x_j)\log_2 p(y_k \mid x_j)$$

鎖ルール

■ 結合エントロピーの分解

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j, y_k) \\
&= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(y_k \mid x_j)p(x_j) \\
&= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j) - \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(y_k \mid x_j) \\
&= -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j)\log_2 p(x_j) - \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(y_k \mid x_j) \\
&= H(X) + H(Y \mid X)
\end{aligned}
$$

相対エントロピー

■ 相対距離

本来の確率分布 *p* に関わらず確率分布 *q* で符号化した場合の損失

$$D(p \| q) \equiv \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) \log_2 \frac{p(x_j)}{q(x_j)} = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) \log_2 \frac{1}{q(x_j)} - H(p)$$

■ 平均符号長

$$\overline{L} = H(p) + D(p \| q)$$

確率分布 *p* と *q* の相対距離

相互情報量

■ 相互情報量

結合確率 $p(x_j, y_k)$ と入出力が独立な確率 $p(x_j)p(y_k)$ の相対エントロピー

$$I(X;Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 \frac{p(x_j, y_k)}{p(x_j)p(y_k)}$$

■ 相互情報量とエントロピー

$$I(X;Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 \frac{p(x_j \mid y_k)}{p(x_j)}$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j \mid y_k)$$

$$= H(X) - H(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

相互情報量の性質

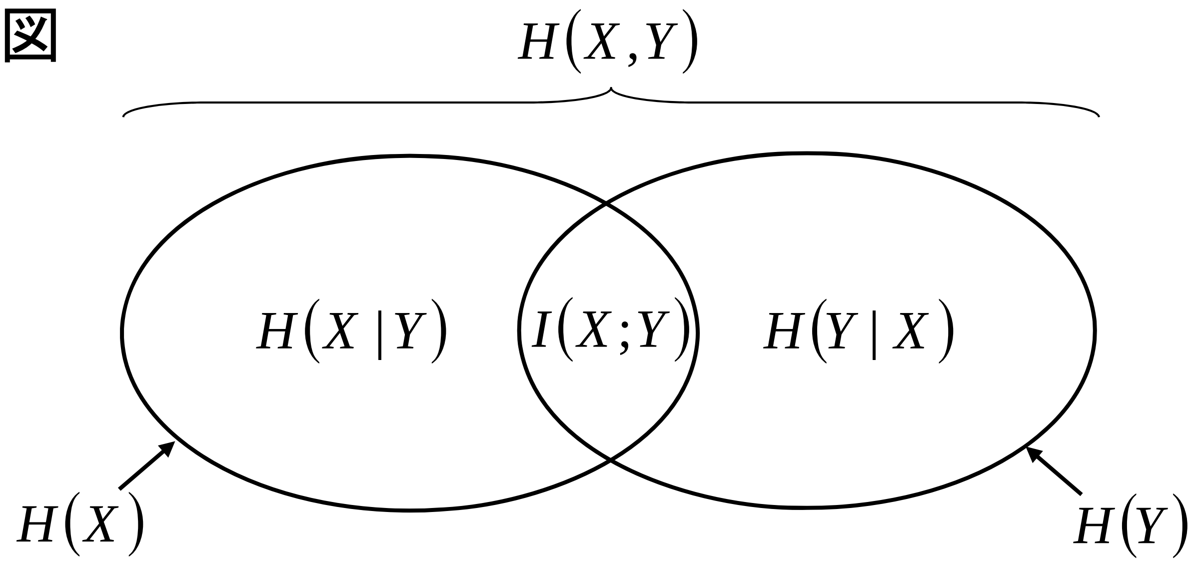
■ 相互情報量の性質

$$I(X;Y)=I(Y;X)=H(X)-H(X\mid Y) \longleftarrow \text{相対エントロピー}$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y) \longleftarrow H(X,Y)=H(Y)+H(X\mid Y)$$

$$I(X;Y)\geq 0 \longleftarrow \text{ベン図}$$

■ ベン図



通信路容量

■ 相互情報量

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j)\log_2 p(x_j) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 p(x_j | y_k)$$

■ 通信路容量

入力シンボルの確率分布で最適化した相互情報量の最大値

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$

雑音のない通信路

■ 通信路容量

$$H(X \mid Y) = \log_2 1 = 0$$

$$I(X;Y) = H(X)$$

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$

$$= \max_{p(x_j)} H(X) = 1 \text{ [bit]}$$

when $p(0) = p(1) = 1/2$

重複のない通信路

■ 通信路容量

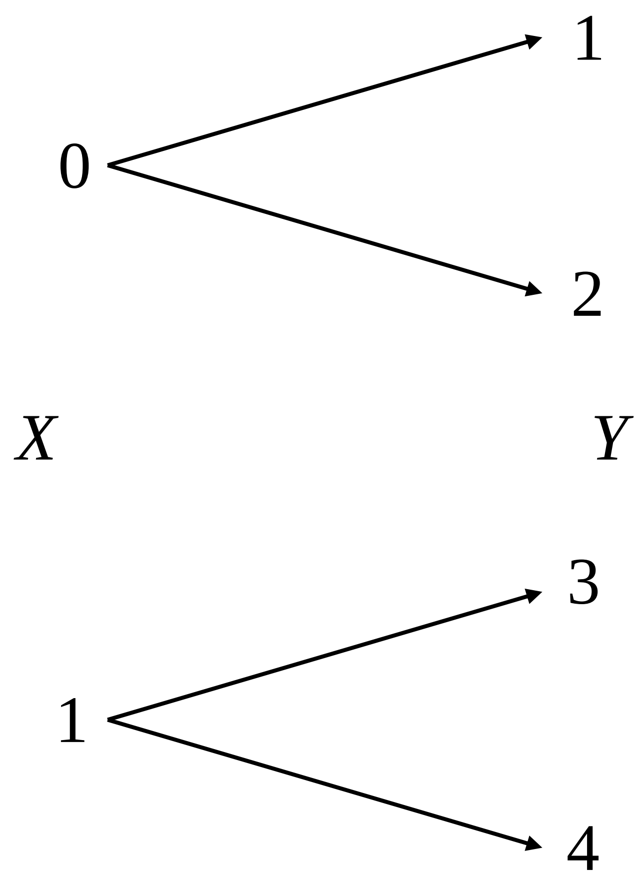
$$H\left(X\,|\,Y\right)=\log_2 1=0$$

$$I\left(X;Y\right)=H\left(X\right)$$

$$C=\max_{p(x_j)} I\left(X;Y\right)$$

$$=\max_{p(x_j)} H\left(X\right)=1\ \text{[bit]}$$

when $p(0)=p(1)=1/2$



タイプライタ通信路

- 通信路容量

$$H(X\,|\,Y) = \log_2 2 = 1 \quad \text{[bit]}$$

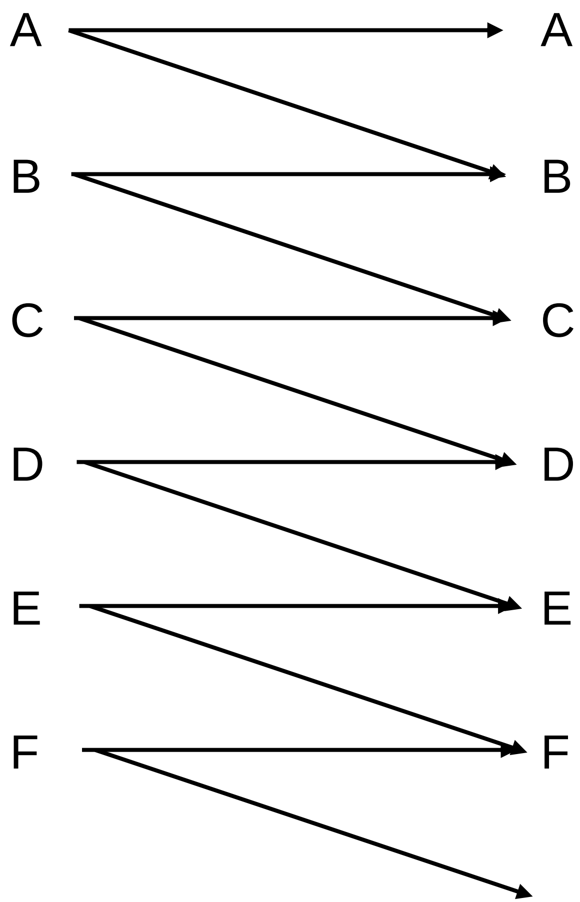
$$I(X;Y) = H(X) - H(X\,|\,Y)$$

If $J = 26$

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$

$$= \log_2 26 - 1 = \log_2 13 \quad \text{[bits]}$$

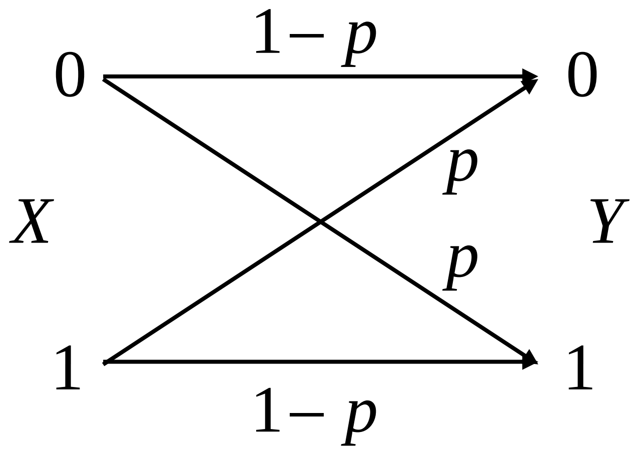
when $p(x_j) = 1/26$



二元対称通信路

■ 通信路容量

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X \mid Y) \\
&= H(Y) - H(Y \mid X) \\
&= H(Y) - \sum_{j=0}^{1} p(x_j) H(Y \mid X = x_j) \\
&= H(Y) - \sum_{j=0}^{1} p(x_j) H(p) \\
&= H(Y) - H(p) \\
&\le 1 - H(p) = C \quad \text{[bits]}
\end{aligned}
$$



$$P(Y=0 \mid X=0) = 1-p$$

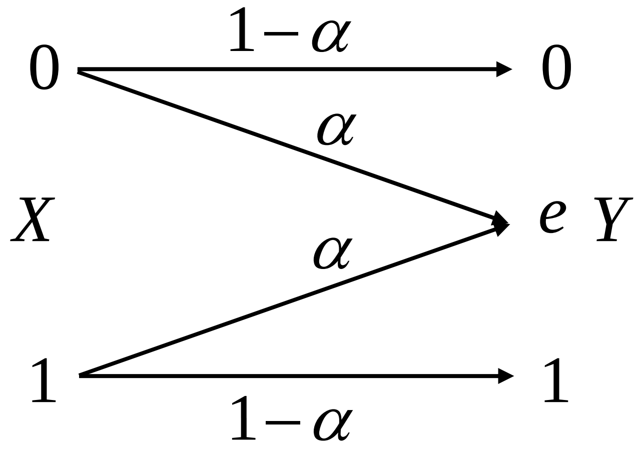
$$P(Y=1 \mid X=1) = 1-p$$

$$P(Y=1 \mid X=0) = p$$

$$P(Y=0 \mid X=1) = p$$

二元消失通信路

- 通信路容量



$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X \mid Y) \\
&= H(X) - \sum_{k=0}^{K} p(y_k) H(X \mid Y = y_k) \\
&= H(X) - P(Y=e) H(X \mid Y=e) \\
&= H(X) - \alpha H(X) \\
&\leq 1-\alpha
\end{aligned}
$$

$$P(Y=e) = p(e) = \alpha$$

$$p(x_j \mid e) p(e) = p(e \mid x_j) p(x_j)$$

$$\Downarrow$$

$$p(x_j \mid e) = p(x_j)$$

$$H(X \mid Y=e) = H(X)$$

まとめ

1. 通信路は条件付確率(遷移確率)で表現可能

$$p(y_k \mid x_j) = P(Y = y_k \mid X = x_j)$$

2. 結合確率(エントロピー)の条件付確率による表現

$$H(Y, X) = H(X) + H(Y \mid X)$$

3. 相互情報量は通信路による損失を考慮したエントロピー

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

4. 通信路容量は入力発生確率に対する最大相互情報量

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$