問 1

O 県と Y 県で採れた今年の桃の糖度を比較したい。糖度を測る測定器の示す値は

O 県の桃の糖度　$X=\theta_1+\varepsilon$

Y 県の桃の糖度　$Y=\theta_2+\varepsilon$

という確率モデルに従っているとする。ここでθ_1、θ_2は各県の桃の糖度の平均である。またεは糖度のばらつきを表す確率変数であり、2 つの県はともに平均 0、分散 3 の正規分布に従っていることが分かっている。八百屋に行き、O 県産の桃 20 個の糖度$X_1, X_2, ... X_{20}$と、Y 県産の桃 30 個の糖度$Y_1, Y_2, ... Y_{30}$を測定したとする。θ_1、θ_2の測定量として標本平均

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_{20}}{20}、\bar{Y}=\frac{Y_1+Y_2+...+Y_{30}}{30}$$

を用いるとして、その差について

帰無仮説 H_0：2 つの県で糖度は同じ、
すなわち$\theta_1=\theta_2$である

対立仮説 H_1：2 つの県で糖度は異なる、
すなわち$\theta_1\neq\theta_2$である

という仮説を考えて検定を行いたい。この時、以下の問いに答えよ

(a) $\bar{X}$、$\bar{Y}$、およびその差$\bar{X}-\bar{Y}$の分散を求めよ。

(b) 前問（a）の結果を用いて、帰無仮説が正しい時に標準正規分布に従うような検定統計量 T を、標本平均の差$\bar{X}-\bar{Y}$を用いて構成せよ。

(c) 検定方法として$|T|>c$のとき帰無仮説を棄却するように棄却領域を定めることを考える。有意水準が 1%（帰無仮説が正しい時に$|T|>c$が起こる確率が 1%となる）となるように c を定めよ。

(d) 帰無仮説が正しくなく、実は真の値の差が

$$\theta_1-\theta_2=2$$

であるときに、前問（c）の検定方法で誤って帰無仮説が受容される確率（第 2 種の過誤の確率）はどのぐらいか。

(e) 実際にある八百屋で調べたところ

$$\bar{X}=14.3,\quad \bar{Y}=15.7$$

であった。このとき、前で定めた有意水準 1%の検定で、帰無仮説は棄却されるか、されないか。

解答

(a) $V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{20}=\dfrac{3}{20}=0.15$

$V(\bar{Y})=\dfrac{V(Y)}{30}=\dfrac{3}{30}=0.1$

$V(\bar{X}-\bar{Y})=V(\bar{X})+V(\bar{Y})=0.25$

(b) $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{X}-\bar{Y})}}=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{0.5}=2(\bar{X}-\bar{Y})$

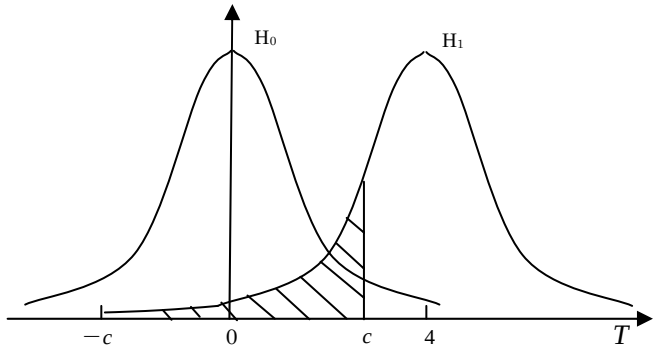
(c) $P_{H_0}(|T|>c)=0.01\Rightarrow P(T>c)=0.005\Rightarrow P(T<c)=0.995$ の c を求めたらよい。表に調べて、c の値は 2.576 である。

(d) $T'=\sqrt{\dfrac{20\cdot 30}{20+30}}\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma}$ と定義したら、

$$\delta=E(T')=\sqrt{\frac{20\cdot 30}{20+30}}\frac{\theta_1-\theta_2}{\sigma}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$$

$V(T')=1$

T'は平均δ分散 1 の正規分布になる。第二種の過誤の確率は図に示した部分の面積になる。



$$P_{H_1}(-c<T'<c)=P(-c-4<T<c-4)$$
$$=P(T<-1.424)-P(T<-6.576)$$
$$=P(T<6.576)-P(T<1.424)\ \fallingdotseq\ 1-0.923=0.077$$

従って、第二種の過誤の確率は約 0.077 である。

(e) $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{X})}}=\dfrac{14.3-15.7}{0.5}=-2.8$

$|T=-2.8|=2.8>2.576$であるから、棄却される。

以上

● 但し標準正規分布の累積分布と値は次式と表を参照せよ。

$$P(x<z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$P(x<z)$	0.923	0.935	0.950	0.963	0.975	0.990	0.993	0.995	0.997	1
z	1.424	1.512	1.645	1.787	1.960	2.326	2.457	2.576	2.748	＞4