問 1

特性関数：

$$\varphi(t)=E\left(e^{itn}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{itn}p(n)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{itn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\left(\lambda e^{it}\right)}=\exp\left(\left(e^{it}-1\right)\lambda\right)$$

平均：

$$\bar{n}=\left.\frac{\varphi'(t)}{i}\right|_{t=0}=\left.\frac{ie^{it}\lambda\exp\left(\left(e^{it}-1\right)\lambda\right)}{i}\right|_{t=0}=\lambda$$

分散：

$$\overline{n^2}=\left.\frac{\varphi''(t)}{-1}\right|_{t=0}=\left.\frac{-\left(e^{2it}\lambda^2+e^{it}\lambda\right)\exp\left(\left(e^{it}-1\right)\lambda\right)}{-1}\right|_{t=0}=\lambda^2+\lambda$$

$$V(n)=\overline{n^2}-\bar{n}^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

以上

問 2

(a) 周辺確率密度関数 $p_X(x)$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(x,y)\cdot dy=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{\left(y+x/2\right)^2+3x^2/4}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{\left(y+x/2\right)^2}{3}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\int\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y+x/2\right)^2}{3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

(b) Z の確率密度関数

$$p_Z(z)=\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}\delta(z-x-y)\,p_{XY}(x,y)\,dxdy$$

$$=\int p_{XY}(z-y,y)\,dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{(z-y)^2+(z-y)y+y^2}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-z/2\right)^2+3z^2/4}{3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\int\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y-z/2\right)^2}{3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$$

(c) 回帰曲線

条件付き確率密度関数

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)\Big/\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{x^2+4xy+4y^2}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y+x/2\right)^2}{3}\right)$$

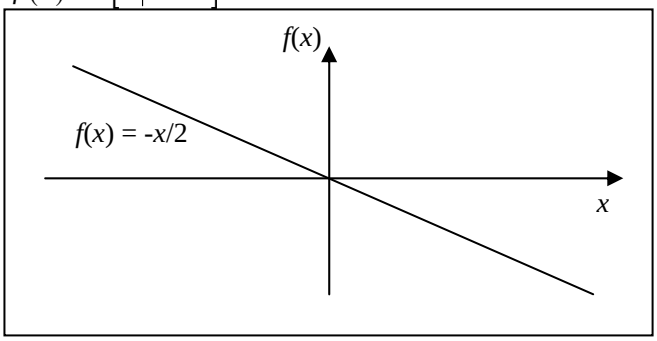
回帰曲線 $f(x)=E[Y|X=x]$

$$f(x)=E[Y|X=x]=\int\frac{y}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y+x/2\right)^2}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{z}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{3}\right)dz-\frac{x}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{3}\right)dz$$

$$=-\frac{x}{2}$$

但し $z=y+x/2$ とする。したがって、回帰曲線 $f(x)=E[Y|X=x]$ は下の図になる。



以上

問 3

定義から、キュムラント母関数は $k(t)=\log E\left(e^{tX}\right)$。

1 次のキュムラントは下のようになる。

$$k'(t)\big|_{t=0}=\left.\frac{E'\left(e^{tX}\right)}{E\left(e^{tX}\right)}\right|_{t=0}=\left.\frac{E\left(Xe^{tX}\right)}{E\left(e^{tX}\right)}\right|_{t=0}=E(X)\quad\square$$

2 次のキュムラントは下のようになる。

$$k''(t)\big|_{t=0}=\left.\frac{E'\left(Xe^{tX}\right)E\left(e^{tX}\right)-E\left(Xe^{tX}\right)E'\left(e^{tX}\right)}{\left[E\left(e^{tX}\right)\right]^2}\right|_{t=0}$$

$$=\left.\frac{E\left(X^2e^{tX}\right)E\left(e^{tX}\right)-\left[E\left(Xe^{tX}\right)\right]^2}{\left[E\left(e^{tX}\right)\right]^2}\right|_{t=0}$$

$$=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=V(X)\quad\square$$

(裏へ続く)

別解

モーメント母関数は$\phi(t)=E\left(e^{tX}\right)=e^{k(t)}$。モーメント母関数の性質を利用して、証明する。

$$\phi(t)\big|_{t=0}=E\left(e^{tX}\right)\big|_{t=0}=e^{k(t)}\big|_{t=0}=e^{k(0)}=1$$

$$\phi'(t)\big|_{t=0}=E'\left(e^{tX}\right)\big|_{t=0}=k'(t)e^{k(t)}\big|_{t=0}=k'(0)=\overline{X} \quad \square$$

$$\phi''(t)\big|_{t=0}=E''\left(e^{tX}\right)\big|_{t=0}=k''(t)e^{k(t)}+\left[k'(t)\right]^2e^{k(t)}\big|_{t=0}$$

$$=k''(0)+\left[k'(0)\right]^2=k''(0)+\overline{X}^2=\overline{X^2}$$

従って $k''(0)=\overline{X^2}-\overline{X}^2=V(X)$ $\square$

但し $E'\left(e^{tX}\right)=\dfrac{\partial E\left(e^{tX}\right)}{\partial t}=E\left(\dfrac{\partial e^{tX}}{\partial t}\right)=E\left(Xe^{tX}\right)$

$$E''\left(e^{tX}\right)=\frac{\partial^2 E\left(e^{tX}\right)}{\partial t^2}=E\left(\frac{\partial^2 e^{tX}}{\partial t^2}\right)=E\left(X^2e^{tX}\right)$$

以上

問 4

$$\begin{aligned}
m&=E\left[f(x)\right]=\int_X f(x)\,p_X(x)\cdot dx\\
&\geq\int_{f(X)\geq tm} f(x)\,p_X(x)\cdot dx\\
&\geq\int_{f(X)\geq tm} tm\cdot p_X(x)\cdot dx\\
&=tm\cdot\int_{f(X)\geq tm} p_X(x)\cdot dx\\
&=tm\cdot P\left(f(X)\geq tm\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore P\left(f(X)\geq tm\right)\leq\frac{1}{t}$$

以上

問 5

コインの表が出るのを 1、裏が出るのを 0 として、そして出た結果を確率変数 X とする。X の一般化確率密度関数は

$$p(x)=0.5\delta(x-1)+0.5\delta(x)$$

X 平均は 0.5、分散は$1/4$になる。

n 回をふって出た結果の平均 Y_n をとして

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

Y_n の平均：

$E\left[Y_n\right]=E\left[X\right]=0.5$ ；分散：$V\left[Y_n\right]=\dfrac{V\left[X\right]}{n}=\dfrac{1}{4n}$

そして、中心極限定理から、Y_n は正規分布に法則収束する。従って Y_n の確率密度関数は

$p_{Y_n}(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_n}^2}}\exp\left(-\dfrac{(y-0.5)^2}{2\sigma_{Y_n}^2}\right)$、但し $\sigma_{Y_n}^2=V\left[Y_n\right]=\dfrac{1}{4n}$

100 回コインをふって 55 回以上表が出る確率は

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{100}\geq\frac{55}{100}\right)&=\int_{11/20}^{\infty}p_{Y_{100}}(y)\,dy\\
&=\int_{11/20}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_{100}}^2}}\exp\left(-\frac{(y-0.5)^2}{2\sigma_{Y_{100}}^2}\right)dy\\
&=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz
\end{aligned}$$

但し $z=(y-0.5)/\sigma_{Y_{100}}$。

10000 回コインをふって K 回以上表が出る確率は

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{10^4}\geq\frac{K}{10^4}\right)&=\int_{K/10^4}^{\infty}p_{Y_{10^4}}(y)\,dy\\
&=\int_{K/10^4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_{10^4}}^2}}\exp\left(-\frac{(y-0.5)^2}{2\sigma_{Y_{10^4}}^2}\right)dy\\
&=\int_{\left(\frac{2K-10^4}{10^2}\right)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz
\end{aligned}$$

但し $z=(y-0.5)/\sigma_{Y_{10^4}}$。

両方の確率が同じ時は

$$\frac{2K-10^4}{10^2}=1\Rightarrow K=5050$$

以上

問 6

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X};\mathbf{Y})&=H(\mathbf{Y})-H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})=-\sum_{j=1}^{M}p_Y(Y_j)\log p_Y(Y_j)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}p_X(X_i)\sum_{j=1}^{M}p_{Y|X}(Y_j|X_i)\log p_{Y|X}(Y_j|X_i)\\
&=-\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}p_{XY}(X_i,Y_j)\log p_Y(Y_j)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}p_{XY}(X_i,Y_j)\log p_{Y|X}(Y_j|X_i)\\
&=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}p_{XY}(X_i,Y_j)\log\frac{p_{Y|X}(Y_j|X_i)}{p_Y(Y_j)}\\
&=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}p_{XY}(X_i,Y_j)\log\frac{p_{XY}(X_i,Y_j)}{p_X(X_i)\,p_Y(Y_j)}\\
&=D\left[p_{\mathbf{XY}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,\|\,p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})\,p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})\right]\quad\square
\end{aligned}$$

以上