応用確率統計（中間試験）　　平成 22 年 12 月 09 日

問 1、次の確率関数をポアソン分布(Poisson distribution)という。

$$p(n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad (\lambda>0,\ n=0,1,2,\cdots)$$

この分布の特性関数と平均値 $\overline{n}$ と分散 σ^2 を求めよ。

問 2、X、Y が下の同時確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p_{XY}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)$$

(a) 周辺確率密度関数 $p_X(x)$ を求めよ。

(b) 確率変数 $Z=X+Y$ とするとき、Z の確率密度関数を求めよ。

(c) 回帰曲線 $f(x)=E[Y|X=x]$ を求め、図で示せよ。

問 3、キュムラント母関数は $k(t)=\log E\left(e^{tX}\right)$ と定義する。
$k(t)$ を m 回微分してから $t=0$ を代入して得られる $k^{(m)}(0)$ を m 次のキュムラントという。1 次、2 次のキュムラントは X の平均と分散にそれぞれ一致することを示せ。

問 4、確率密度関数 $p(x)$ に従う確率変数 X とある関数 $f(x)\ (\geq 0)$ について、$m=E[f(x)]$ が有限とする。任意の $t\ (>0)$ について

$$P(f(X)\geq tm)\leq\frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ。

問 5、表と裏が 0.5 の確率で出るコインを毎回独立にふることを考える。100 回コインをふって 55 回以上表が出る確率と 10000 回コインをふるとき K 回以上表が出る確率と同じであるとする。そのときの K を求めよ。

問 6、2 つの確率事象系 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_N)$、$\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_M)$ の同時確率分布 $p_{\mathbf{XY}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ が与えられたとき、$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$ の相互情報量 $I(\mathbf{X};\mathbf{Y})=D\left[p_{\mathbf{XY}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\middle\|p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})\right]$ となることを示せ。
但し $I(\mathbf{X};\mathbf{Y})=H(\mathbf{Y})-H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})=-\sum_{j=1}^{M}p_Y(Y_j)\log p_Y(Y_j)+\sum_{i=1}^{N}\left[p_X(X_i)\sum_{j=1}^{M}p_{Y|X}(Y_j|X_i)\log p_{Y|X}(Y_j|X_i)\right]$ であり、
また $p_Y(Y_j)=\sum_{i=1}^{N}p_{XY}(X_i,Y_j)$ である。

注意事項

(a) 試験時間：09 時 00 分から 10 時 30 分まで、時間厳守。

(b) 答案用紙は 3 枚 1 組であり、一人分は 1 組. 各自確認すること。

(c) 各答案用紙に学籍番号・氏名・問題番号などを記入すること。

(d) 不正行為と認定された場合は、今学期のすべての科目が無効になるので、十分注意すること。