問 1

カルバック情報量についてつぎの性質が成り立つことを説明せよ。

(a) 任意の確率密度関数 $p(x)$、$q(x)$ について $D(p\|q)\geq 0$

(b) $D(p\|q)=0$ ならば $p(x)=q(x)$。

解答

● 準備：

$\ln t$ は凸関数だから、下の不等式が成り立つ。

$$F(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1\geq 0$$

但し、等号成立は $t=1$ のときに限られる。

(a) カルバック情報量の定義から

$$\begin{aligned}D(p\|q)&=\int p(x)\ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)dx\\&=\int p(x)\ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)dx+\int q(x)dx-\int p(x)dx\\&=\int p(x)\left\{\ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)+\frac{q(x)}{p(x)}-1\right\}dx\\&=\int p(x)F\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)dx\geq 0\end{aligned}$$

□

(b) $D(p\|q)=0$ の時

$$F\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)=0\ \Rightarrow p(x)=q(x)$$

□

以上

問 2

X、Y が独立で、それぞれ平均 0、分散 σ_x^2 と平均 0、分散 σ_y^2 の正規分布に従う確率変数である。 確率変数 $Z=X+Y$ と X とのカルバック情報量を求めよ。但し Z の確率密度関数を演習 3 問 1 の結論で求めてもよい。

解答

X の確率密度関数は下のようになる。

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

なお、演習 3 問 1 の結論から、Z は平均 0 分散 $(\sigma_x^2+\sigma_y^2)$ の正規分布に従う確率密度関数になる。

$$p_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)$$

Z と X とのカルバック情報量は

$$D(p_Z\|p_X)=\int p_Z(x)\ln\left(\frac{p_Z(x)}{p_X(x)}\right)dx$$

$$=\int p_Z(x)\ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)}\right)dx$$

約分して下のようになる

$$\int p_Z(x)\ln\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_X^2}-\frac{x^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int p_Z(x)\left\{\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)+\frac{x^2}{\sigma_X^2}-\frac{x^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)+\frac{V(Z)}{\sigma_X^2}-\frac{V(Z)}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{\sigma_X^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)+\frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}{\sigma_X^2}-1\right\}$$

但し $V(Z)=\sigma_x^2+\sigma_y^2$ は Z の分散。

通信システムにおいて X、Y 、Z それぞれが送信信号、雑音、受信信号と考えた時に $D(Z\|X)$ は雑音が存在する中でどれぐらい受信信号が送信信号に近いかの尺度を表す。このカルバック距離を小さくすればするほど受信信号が送信信号に近づくことである。結果から $\sigma_Y^2\ll\sigma_X^2$ とすればよい。

以上