問 1

実数に値をとる確率変数 X と、同じ分布に従う独立な確率変数 X_1、X_2、…、X_n を考える。

ただし X が区間[0、2]上で一様分布の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

確率変数

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

とするとき、次の問題を答えよ。

(a) X の平均と分散を求めよ。

(b) n が 300 の時、Y_n の平均と分散を求めよ。

(c) チェビシェフの不等式を使って、確率 $p(0.9 \le Y_{300} \le 1.1)$ の範囲を求めよ。

(d) 確率 $p(0.9 \le Y_n \le 1.1) \ge 0.99$ になるように、n の最小の値を求めよ。但し、チェビシェフの不等式を用いよ。

解答

(a) X の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

したがって X の平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x \cdot dx = 1$$

X の分散は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 p(x) \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)^2 \cdot dx = \frac{1}{3}$$

(b) Y_n の平均：

$E[Y_n] = E[X] = 1$；分散：$V[Y_n] = \dfrac{V[X]}{n} = \dfrac{1}{3n}$

したがって Y_{300} の平均は 1、分散は $\dfrac{1}{900}$ である。

(c)
$$p(|Y_{300} - 1| > 0.1) \le p(|Y_{300} - 1| \ge \sigma_Y t) \le \frac{1}{t^2}$$

$$\sigma_Y t = 0.1 \Rightarrow \frac{1}{t^2} = 100\sigma_Y^2 = \frac{1}{9}$$

$$p(0.9 \le Y_{300} \le 1.1) = 1 - p(|Y_{300} - 1| > 0.1)$$
$$\ge 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{8}{9} \cong 0.889$$

(d)
$$p(0.9 \le Y_n \le 1.1) = p(|Y_n - 1| \le \sigma_Y t) \ge 1 - \frac{1}{t^2} \ge 0.99$$

$$\frac{1}{t^2} = 100\sigma_Y^2 \le 0.01 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{3n} \le 0.0001$$

$$n \ge \frac{10000}{3} = 3333.\dot{3}$$

したがって n の最小の値は 3334 である。

以上

問 2

表が 0.6 の確率で、裏が 0.4 の確率で出るコインを毎回独立にふることを考える。150 回コインをふって 100 回以上表が出る確率と 600 回コインをふるとき K 回以上表が出る確率と同じであるとする。そのときの K を求めよ。

解答

コインの表が出るのを 1、裏が出るのを 0 として、そして出た結果を確率変数 X とする。X の一般化確率密度関数は

$$p(x) = 0.6\delta(x-1) + 0.4\delta(x)$$

X 平均は 0.6、分散は $6/25$ になる。

n 回をふって、出た結果の平均 Y_n をとして

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

(e) Y_n の平均：

$E[Y_n] = E[X] = 0.6$；分散：$V[Y_n] = \dfrac{V[X]}{n} = \dfrac{6}{25n}$

そして、中心極限定理から、Y_n は正規分布に法則収束する。従って Y_n の確率密度関数は

$$p_{Y_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_n}^2}} \exp\left(-\frac{(y-0.6)^2}{2\sigma_{Y_n}^2}\right)$$、但し $\sigma_{Y_n}^2 = V[Y_n] = \dfrac{6}{25n}$

150 回コインをふって 100 回以上表が出る確率は

$$P\left(Y_{150} \ge \frac{100}{150}\right) = \int_{2/3}^{\infty} p_{Y_{150}}(y)\,dy$$
$$= \int_{2/3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_{150}}^2}} \exp\left(-\frac{(y-0.6)^2}{2\sigma_{Y_{150}}^2}\right) dy$$
$$= \int_{5/3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dy$$

但し $z = (y-0.6)/\sigma_{Y_{150}}$。

（裏へ続く）

600 回コインをふって K 回以上表が出る確率は

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_{600} \geq \frac{K}{600}\right) &= \int_{K/600}^{\infty} p_{Y_{600}}(y)\,dy \\
&= \int_{K/600}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_{600}}^2}} \exp\left(-\frac{(y-0.6)^2}{2\sigma_{Y_{600}}^2}\right) dy \\
&= \int_{\left(\frac{K}{12}-30\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dy
\end{aligned}
$$

但し $z = (y-0.6)/\sigma_{Y_{600}}$ 。

両方の確率が同じ時は

$$
\frac{K}{12} - 30 = \frac{5}{3} \Rightarrow K = 380
$$

以上