問 1

確率変数の収束の定義とその関係を論ぜよ。さらに、法則収束について例を挙げ、説明せよ。

解答

① **概収束**：「$X_n(\omega)\to X(\omega)$」が確率 1 で成り立つ。このことを $X_n(\omega)\to X(\omega)$ (a.s.) と表現する

② ***p* 次平均収束**：p を定数とする。ある p (>0)について $\int\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|^p p(\omega)\cdot d\omega\to 0$ が成り立つ。このことを $E\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|^p\right)\to 0$ と表記する。

③ **確率収束**：$A_\varepsilon=\left\{\omega;\ \left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|>\varepsilon\right\}$ とするとき、任意の ε (>0)について $n\to\infty$ のとき $P\left(A_\varepsilon\right)\to 0$ が成り立つ。このことを

$(\forall\varepsilon>0)\ \ P\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|>\varepsilon\right)\to 0$ と書く。

④ **法則収束**：任意の連続有界関数 $f(x)$ について、$n\to\infty$ のとき

$$\int f\left(X_n(\omega)\right)p(\omega)\cdot d\omega\to\int f\left(X(\omega)\right)p(\omega)\cdot d\omega$$

が成り立つ。このことを $E\left(f\left(X_n\right)\right)\to E\left(f\left(X\right)\right)$ と書く。

そして、以下の関係が成り立つことが知られている。

① 概収束すれば確率収束する。

② 平均収束すれば確率収束する。

③ 確率収束すれば法則収束する。

法則収束の例：教科書の例 6.3、例 6.4 などを参照。

以上

問 2

実数に値をとる確率変数 X と、同じ分布に従う独立な確率変数 X_1、X_2、…、X_n を考える。

ただし X が区間[−1、1]上で一様分布の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

確率変数

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$$

とするとき、次の問題を答えよ。

(a) X_n の特性関数を求めよ。

(b) Y_n の特性関数を$\{X_n\}$の独立性から求め、n で表せよ。

(c) n が大きくなるとき、Y_n の確率分布が法則収束するか。レビーの定理を使って、説明せよ。

解答

(a) X の確率密度関数は

$$p(x)=\begin{cases}1/2 & ,\ -1\le x\le 1\\ 0 & ,\ \text{otherwise}\end{cases}$$

したがって X の特性関数

$$\varphi_X(t)=E\left(e^{ixt}\right)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{ixt}}{2}\cdot dx=\frac{\sin t}{t}$$

(b) $\{X_n\}$の独立性から

$$\varphi_Y(t)=E\left(e^{iyt}\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(e^{ixt/\sqrt{n}}\right)=\left[\frac{\sin\left(t/\sqrt{n}\right)}{t/\sqrt{n}}\right]^n$$

別解：$Z=X/\sqrt{n}$ とすると、Z の特性関数

$\varphi_Z(t)=E\left(e^{iZt}\right)=E\left(e^{ixt/\sqrt{n}}\right)$ を使ってもいい。

(c) (b)の結果から、$n\to\infty$ においては

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_Y(t)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(t/\sqrt{n}\right)}{t/\sqrt{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(t/\sqrt{n}\right)-\left(t/\sqrt{n}\right)^3/3!+\left(t/\sqrt{n}\right)^5\cdot o(x)}{t/\sqrt{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{t^2}{6n}\right]^n=\exp\left(-\frac{t^2}{6}\right)$$

となり、原点の近くを含む各点で収束することから、ある確率分布に法則収束することが分かった。ちなみに、この確率分布は平均 0、分散 1/3 の正規分布になる。

以上