問 1

X、Y が下の同時確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p_{XY}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)$$

(a) 周辺確率密度関数 $p_X(x)$ を求めよ。但し

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(x,y)\cdot dy。$$

(b) 条件付き確率密度関数 $p_{Y|X}(y|x)$ を求めよ。

(c) 回帰曲線 $f(x)=E[Y|X=x]$ を求め、図で示せよ。

解答

(a)

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{XY}(x,y)\cdot dy=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{(y+x/2)^2+3x^2/4}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{(y+x/2)^2}{3}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\int\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{(y+x/2)^2}{3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

(b)

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)\Big/\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{x^2+4xy+4y^2}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{(y+x/2)^2}{3}\right)$$

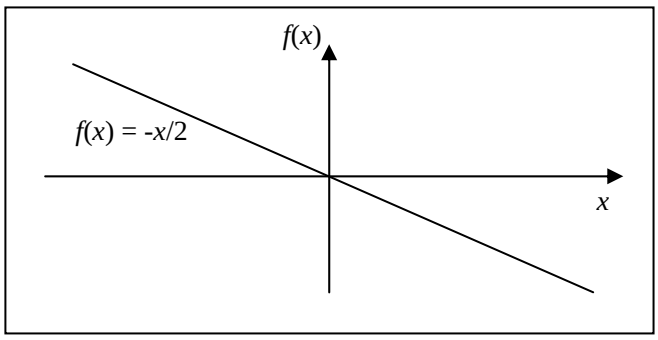
(c)

$$f(x)=E[Y|X=x]=\int\frac{y}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{(y+x/2)^2}{3}\right)dy$$

$$=\int\frac{z}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{3}\right)dz-\frac{x}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{3}\right)dz$$

$$=-\frac{x}{2}$$

但し $z=y+x/2$ とする。したがって、回帰曲線 $f(x)=E[Y|X=x]$ は下の図になる。



以上

問 2

ある確率変数 X の平均が 3 で分散が 2.5 であるという。チェビシェフの不等式を使って、「確率 0.9 以上で X が入る区間(a, b)」を求めよ。

解答

チェビシェフの不等式から次の式が成り立つ。

$$P\left(|X-3|<\sqrt{\frac{5}{2}}t\right)\geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$1-\frac{1}{t^2}=0.9$ を満たすためには $t=\sqrt{10}$。

したがって、求める区間は

$-5<X-3<5\Rightarrow -2<X<8$

以上