問 1

X、Y が独立で、それぞれ平均 0 分散 σ_x^2 と平均 0 分散 σ_y^2 の正規分布に従う確率変数である。そして確率変数 $Z = X + Y$ とするとき、Z の確率密度関数を求めよ。なお、この結果から得られた結論を簡単に述べ。

解答

X、Y の確率密度関数はそれぞれ下の式になる。

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right),\ p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

従って、

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}\delta(z-x-y)\,p_X(x)\,p_Y(y)\,dxdy \\
&= \int p_X(z-y)\,p_Y(y)\,dy \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2\sigma_x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)dy \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)dy \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{\sigma_y^2 z^2 - 2\sigma_y^2 yz + \left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)dy \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\left(y-\frac{\sigma_y^2 z}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)z^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)dy \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{\left(y-\frac{\sigma_y^2 z}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)\exp\left(-\frac{z^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}}\exp\left(-\frac{z^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}}\exp\left(-\frac{\left(y-\frac{\sigma_y^2 z}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}}\exp\left(-\frac{z^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}}\exp\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2/\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)dy' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}}\exp\left(-\frac{z^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)
\end{aligned}$$

この結果から、独立で平均 0 の正規分布に従う確率変数の和も正規分布に従って、そして、その平均は 0 で、分散は元の確率変数の分散の和になるという結論が得られた。

以上

問 2

二つの確率変数 X、Y が下の同時確率密度関数に従うとする。

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2-xy+y^2}{3}\right)$$

このとき、次の問題を答えよ。

(a) 周辺確率密度関数 $p_X(x)$ を求めよ。そして $p_X(x)$ はどんな確率分布と言えるか。

但し $p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\cdot dy$。

(b) 確率変数 $Z = X + Y$ とするとき、Z の確率密度関数を求めよ。なお、$p_Z(z)$ はどんな確率分布と言えるか。

解答

(a)

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\cdot dy = \int\frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{x^2-xy+y^2}{3}\right)dy \\
&= \int\frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{(y-x/2)^2+3x^2/4}{3}\right)dy \\
&= \int\frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{(y-x/2)^2}{3}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\int\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{(y-x/2)^2}{3}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

従って、平均 0 分散 2 の正規分布になった。ちなみに Y の周辺確率密度関数も同じな正規分布になる。

(b)

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}\delta(z-x-y)\,p_{XY}(x,y)\,dxdy \\
&= \int p_{XY}(z-y,y)\,dy \\
&= \int\frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{(z-y)^2-(z-y)y+y^2}{3}\right)dy \\
&= \int\frac{1}{2\sqrt{3\pi^2}}\exp\left(-\frac{3(y-z/2)^2+z^2/4}{3}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{12\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{12}\right)\int\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-(y-z/2)^2\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{12\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{12}\right)
\end{aligned}$$

従って、平均 0 分散 6 の正規分布になった。そして、独立ではない確率変数の和は問 1 の結論は通用できないことも分かった。

以上