2010 年 11 月 2 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

**幾何学特論第二講義資料 5**

# 5 極小曲面の例

$\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 $g$ と正則 1 次微分形式

$$g(z) = z, \qquad \omega = \frac{a}{z^2}\,dz$$

を考える．ただし $a \in \boldsymbol{C}$ は零でない定数．これらをワイエルストラス表現公式

$$f(z) = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \bigl((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\bigr)\omega \tag{5.1}$$

に代入してみよう．右辺の積分は（積分定数だけの差を除いて）

$$\int a\left(\frac{1}{z^2}-1, \sqrt{-1}\left(\frac{1}{z^2}+1\right), \frac{2}{z}\right)dz = a\left(-\frac{1}{z}-z, \sqrt{-1}\left(\frac{1}{z}+z\right), 2\log z\right)$$

なので，$a = \alpha e^{\sqrt{-1}\tau}$, $z = re^{\sqrt{-1}\theta}$ と書くと

$$\begin{aligned}
f(z) &= \operatorname{Re}\alpha e^{\sqrt{-1}\tau}\left(-\frac{1}{r}e^{-\sqrt{-1}\theta} - re^{\sqrt{-1}\theta}, \sqrt{-1}\left(-\frac{1}{r}e^{-\sqrt{-1}\theta} + re^{\sqrt{-1}\theta}\right), 2(\log r + \sqrt{-1}\theta)\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(-\frac{\alpha}{r}e^{\sqrt{-1}(\tau-\theta)} + \alpha re^{\sqrt{-1}(\tau+\theta)}, \sqrt{-1}\left(-\frac{\alpha}{r}e^{\sqrt{-1}(\tau-\theta)} + +\alpha re^{\sqrt{-1}(\tau+\theta)}\right), 2\alpha e^{\sqrt{-1}\tau}(\log r + i\theta)\right)\\
&= \left(-\frac{\alpha}{r}\cos(\tau-\theta) - \alpha r\cos(\tau+\theta), \frac{\alpha}{r}\sin(\tau-\theta) - \alpha r\sin(\tau+\theta), 2\alpha(\log r\cos\tau - \theta\sin\tau)\right)
\end{aligned}$$

となる．

**■$\tau = 0$ のとき**　すなわち $a$ が実数の場合，対応する極小はめこみは

$$f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \left(-\alpha\left(\frac{1}{r}+r\right)\cos\theta, -\alpha\left(\frac{1}{r}+r\right)\sin\theta, 2\alpha\log r\right) : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$$

となる．とくに

$$u = 2\alpha\log r, \qquad \varphi = \theta + \pi$$

と置き換えると，

$$f(u,\theta) = \left(\alpha\cosh\frac{u}{\alpha}\cos\theta, \alpha\cosh\frac{u}{\alpha}\sin\theta, u\right)$$

となり，これは $\bigl(\boldsymbol{R}^3; (x_1,x_2,x_3)\bigr)$ の $x_1x_3$-平面上の懸垂線 $x_1 = \alpha\cosh\frac{x_3}{\alpha}$ を $x_3$ 軸を軸として回転させて得られる回転面である．これを**懸垂面** (catenoid) とよぶ．

---

2010 年 11 月 2 日

■$\tau = \frac{\pi}{2}$ **のとき**　すなわち $\alpha$ 純虚数のとき，対応する曲面は

$$f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \left(\alpha\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin\theta, \alpha\left(\frac{1}{r} - r\right)\cos\theta, -2\alpha\theta\right)$$

となる．ここで

$$\varphi = -2\alpha\theta, \qquad u = \frac{1}{r} - r$$

とすれば,

$$f(u, \varphi) = \left(\alpha u \sin\frac{\varphi}{2\alpha}, -\alpha u\cos\frac{\varphi}{2\alpha}, \varphi\right)$$

とかける．これは $x_3$ 軸に垂直な直線を $x_3$ 軸方向に平行移動させながら一定の速さで回転することにより得られる線織面で，**定螺旋面** helicoid とよばれる．

いま，$f(z)$ の第 3 成分は $z$ の偏角を含むので，$f$ は $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上では well-defined でなく，$\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ の普遍被覆を定義域にもつ.

## 問題

5-1 ここで与えた例の絵を（どんな汚い手を使ってもよいから）描きなさい．ただし，どういう（汚い）手を使ったかは明記すること.

5-2 正則写像 $\varphi\colon \boldsymbol{C} \ni w \longmapsto z = e^w \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ は普遍被覆写像を与えている．ここで与えた懸垂面のはめこみを $w$ を独立変数として書き直しなさい.