

2章 コンピュータの世界と紙の 世界

2.1 惑星の公転の計算

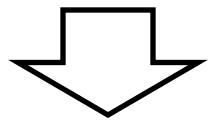
コンピュータで計算するまで

- 現実世界



注目する事象の選択
モデル化

- 紙の上の世界

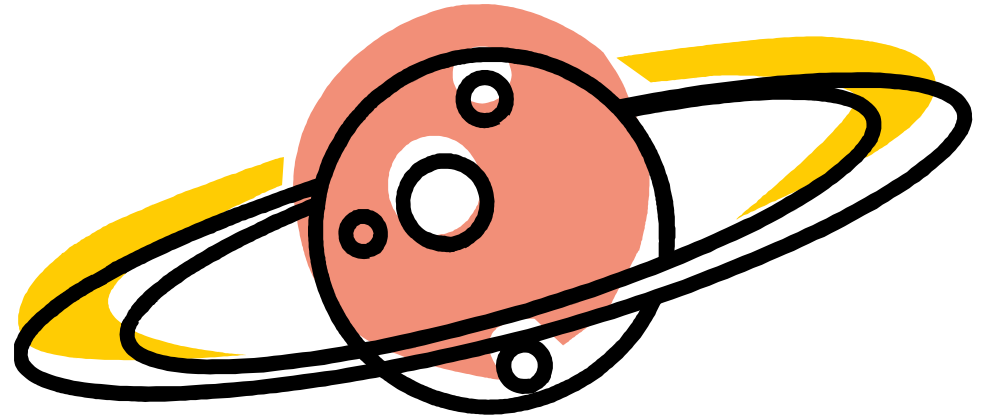


計算する方法の考案
計算誤差

- コンピュータの世界

現実世界→紙の上の世界

- 何に注目するか
 - 惑星の公転の軌道
- 何を無視するか
 - 恒星の動き
- 既知の事柄
 - 惑星の運動軌道は2次元平面上
 - 万有引力の法則



→時刻 t における惑星の位置 $x(t)$ のモデル化

紙の上の世界→コンピュータの世界

- $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}(t)|^3} \mathbf{x}(t)$ と初期時刻のデータから惑星の軌道を計算
- 計算の方法
 - 微分係数の近似計算
- 計算誤差
 - 打ち切り誤差

惑星の軌道の計算

- $u(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ より $x(t + \Delta t) \cong x(t) + u(t)\Delta t$ y も同様
- 加速度についても $u(t + \Delta t) \cong u(t) + a(t)\Delta t$
- $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}}$ だから $u(t + \Delta t) \cong u(t) + \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$
- 時刻 t の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ から、時刻 $t + \Delta t$ の位置 $x(t + \Delta t)$ と速度 $v(t + \Delta t)$ の近似値を計算

$$x(t + \Delta t) \cong x(t) + u(t)\Delta t \qquad u(t + \Delta t) \cong u(t) + \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) \cong y(t) + v(t)\Delta t \qquad v(t + \Delta t) \cong v(t) + \frac{-GM y(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

漸化式での表現

- 時刻 $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$ の位置ベクトルを $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots$
- 速度ベクトルを $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots$
- 各時刻の位置と速度の漸化式は以下の通り

参考: 前ページの近似式

$$x_{i+1} = x_i + u_i \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$

$$u_{i+1} = u_i - \frac{x_i \Delta t}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{y_i \Delta t}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

$$x(t + \Delta t) \cong x(t) + u(t) \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) \cong y(t) + v(t) \Delta t$$

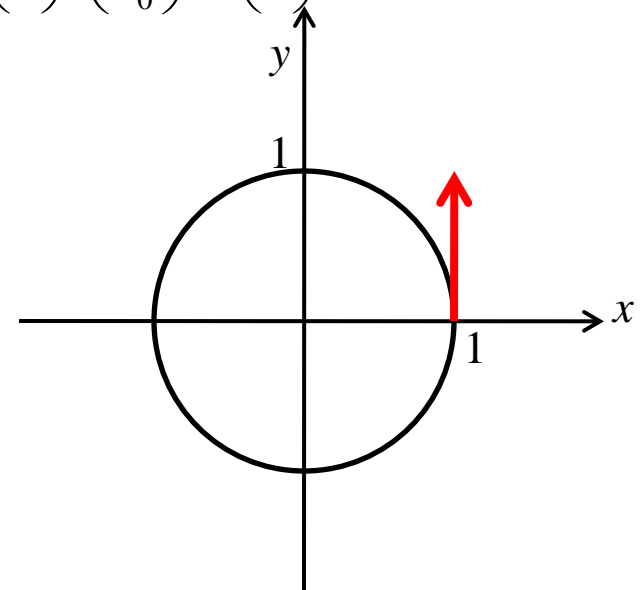
$$u(t + \Delta t) \cong u(t) + \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

$$v(t + \Delta t) \cong v(t) + \frac{-GMy(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

実際の計算における問題

- 変数の型をどうするか
- Δt の値(分割数)をどれくらいにするか
- 位置と速度の初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で計算

→軌道は円になるはず



教科書p.48-p.49の図

- 円軌道になっていない
 - 微分の近似計算による誤差
 - 分割数を大きくして Δt を細かくする→円軌道に
 - こちらが誤差の原因
 - 浮動小数点数の計算の誤差
 - double(仮数部52ビット)→float(仮数部23ビット)に変更すると誤差が増えそうだがあまり変わらない(図2.6)

2.2 計算結果を分析しよう

打ち切り誤差

- 有限の範囲で計算を打ちきることによる誤差

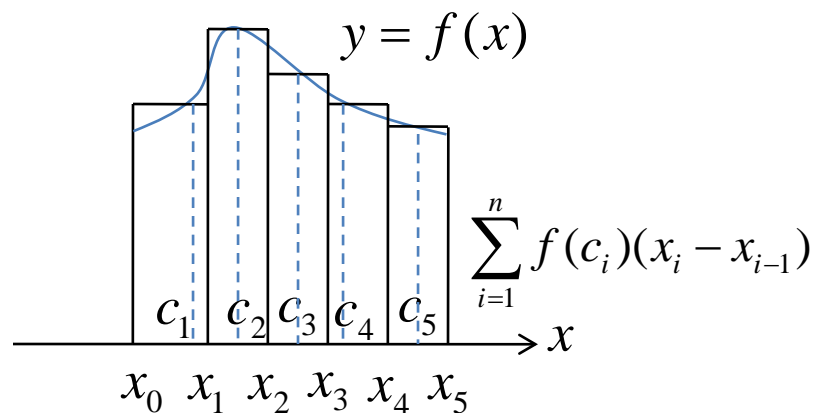
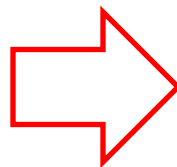
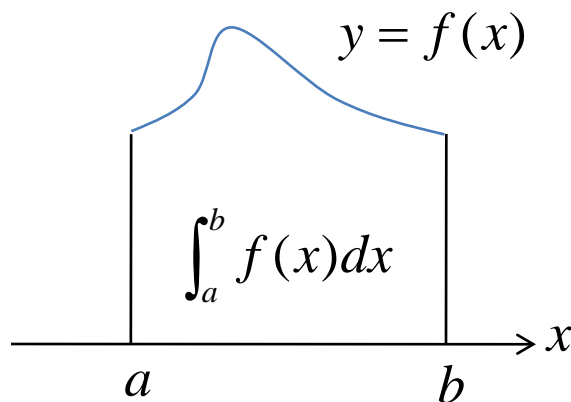
定積分の復習

- 連続関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分 $\int_a^b f(x) dx$
- 対象区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割 中点を c_i

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_0 \leq c_1 \leq x_1, x_1 \leq c_2 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq c_n \leq x_n$$

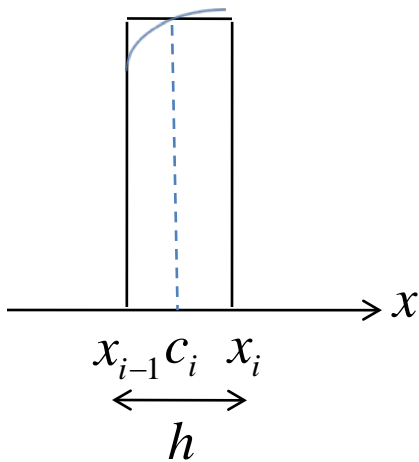
リーマン和で近似



面積の近似

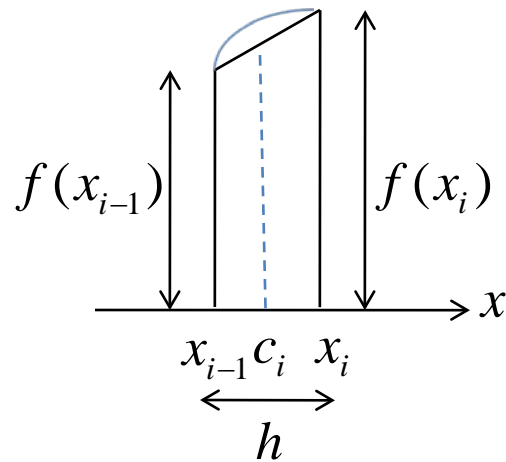
- 中点公式

$$M_n = h \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right)$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$



- 台形公式

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} \{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}$$
$$= h \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + hi) + \frac{1}{2} f(b) \right\}$$



log2の計算結果

- 教科書p.54,p.55の表
 - n (分割数)が大きいほど真の値に近づく
 $I = \log 2 = 0.69314718\dots$
- 中点公式(階段関数で近似)と台形公式(折れ線関数で近似)のどちらが収束が早いかな
→ ほぼ同じ n が2倍になると、 $I - M_n$ も $I - T_n$ も $\frac{1}{4}$ 倍
$$\frac{I - M_n}{I - M_{n/2}} \cong \frac{1}{4} \qquad \frac{I - T_n}{I - T_{n/2}} \cong \frac{1}{4}$$
- $I - M_n$ はおよそ $\frac{1}{n^2}$ に比例

計算結果の改善

- $\frac{\log 2 - M_{256}}{\log 2 - M_{128}} \cong \frac{1}{4}$ が正しいと仮定すると $\log 2 \cong \frac{4}{3}M_{256} - \frac{1}{3}M_{128}$
 \rightarrow 一般に $\log 2 \cong \frac{4}{3}M_{2n} - \frac{1}{3}M_n$ となる $\tilde{M}_{2n} \equiv \frac{4}{3}M_{2n} - \frac{1}{3}M_n$
- 台形公式についても同様 $\tilde{T}_{2n} \equiv \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$

n	\tilde{M}_n	$I - \tilde{M}_n$	$\frac{I - \tilde{M}_n}{I - \tilde{M}_{n/2}}$
4	0.6930550931	9.20875×10^{-5}	
8	0.6931407750	6.40557×10^{-6}	0.0695596612
16	0.6931467678	4.12799×10^{-7}	0.0644438130
32	0.6931471546	2.60068×10^{-8}	0.0630011533
64	0.6931471789	1.62871×10^{-9}	0.0626263626
128	0.6931471805	1.01846×10^{-10}	0.0625316970
256	0.6931471806	6.36546×10^{-12}	0.0625006813

$I - \tilde{M}_n$ は $\frac{1}{n^4}$ に比例

$$\cong \frac{1}{16}$$

収束の度合い

- $I - M_n$ $I - T_n$ はおよそ $\frac{1}{n^2}$ に比例
- $I - \tilde{M}_n$ $I - \tilde{T}_n$ はおよそ $\frac{1}{n^4}$ に比例
- \tilde{M}_n \tilde{T}_n は M_n T_n より優れている(収束が速い)

観察から分析へ

- 真の値 $I = \int_a^b f(x)dx$ と M_n T_n の差(打ち切り誤差)

$f(x)$ が2回連続微分可能のとき

$$I - M_n \cong \frac{h^2}{24} \{f'(b) - f'(a)\}$$

$$I - T_n \cong -\frac{h^2}{12} \{f'(b) - f'(a)\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ なら } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ だから}$$

$$I \cong M_n + \frac{h^2}{24} \{f'(b) - f'(a)\} \equiv \bar{M}_n$$

$$I \cong T_n - \frac{h^2}{12} \{f'(b) - f'(a)\} \equiv \bar{T}_n$$

\bar{M}_n \bar{T}_n の表(教科書p.59)

→ $I - \bar{M}_n$ も $I - \bar{T}_n$ もおよそ $\frac{1}{n^4}$ に比例

\bar{M}_n と \tilde{M}_n の比較

$$\bar{M}_n \equiv M_n + \frac{h^2}{24} \{f'(b) - f'(a)\}$$

$$\tilde{M}_n \equiv \frac{4}{3}M_n - \frac{1}{3}M_{n/2}$$

$$M_n = h \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right)$$

- n を固定した時、 \bar{M}_n の方が \tilde{M}_n より正確(表より)
- 計算の手間： \tilde{M}_n の方が面倒($M_{n/2}$ の計算必要)

軌道計算の改良(1)

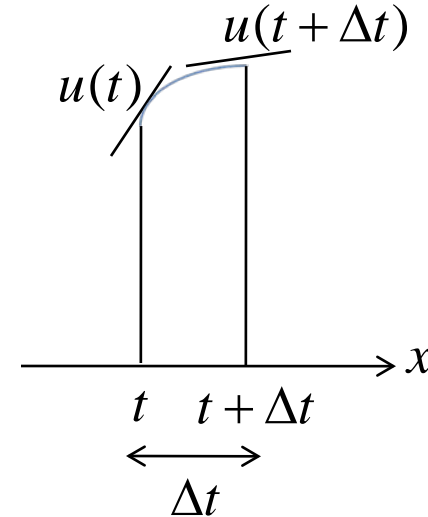
$$u(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$x(t + \Delta t) \cong x(t) + u(t)\Delta t$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} u(t)dt$$

台形公式で近似

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2} \{u(t) + u(t + \Delta t)\} \Delta t$$



● 時刻 $t + \Delta t$ における速度 $u(t + \Delta t)$

時刻 $t + \Delta t$ における位置、速度、加速度

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + u(t)\Delta t$$

$$\tilde{y}(t + \Delta t) = y(t) + v(t)\Delta t$$

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = u(t) + a(t)\Delta t$$

$$\tilde{v}(t + \Delta t) = v(t) + b(t)\Delta t$$

$$\tilde{a}(t + \Delta t) = - \frac{\tilde{x}(t + \Delta t)}{\{\tilde{x}(t + \Delta t)^2 + \tilde{y}(t + \Delta t)^2\}^{3/2}}$$

$$\tilde{b}(t + \Delta t) = - \frac{\tilde{y}(t + \Delta t)}{\{\tilde{x}(t + \Delta t)^2 + \tilde{y}(t + \Delta t)^2\}^{3/2}}$$

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \quad \text{だから}$$

軌道計算の改良(2)

- 台形公式を適用

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2}\{u(t) + \tilde{u}(t + \Delta t)\}\Delta t$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{1}{2}\{v(t) + \tilde{v}(t + \Delta t)\}\Delta t$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{1}{2}\{a(t) + \tilde{a}(t + \Delta t)\}\Delta t$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}\{b(t) + \tilde{b}(t + \Delta t)\}\Delta t$$

- Δt を十分小さくとり、位置を求める
- ホイン法、拡張オイラー法
- 実行結果(p.63-64) 分割数 n の誤差は n^2 に比例