仁

配分 x に対する提携 S の不満　$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$

コア　→　すべての提携の不満をゼロ以下に抑える

$$C = \{x=(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),\quad x_i \geq v(\{i\})\ \forall i \in N$$
$$e(S, x) \leq 0 \quad \forall S \subseteq N\ \}$$

コアは空になることもあり，大きな集合になることもある

不満の提携間での均等化をはかる　→　仁

不満に基づく配分間の比較と仁

２つの配分について，

それぞれ，各提携の不満 e(S, x) を

大きなものから順に並べたベクトルを作る。

２つのベクトルを，大きなものから比較していって，

最初に異なる成分の小さいほうを

より受容的（許容的）であるという

それよりもより受容的な配分が存在しないような配分の全体を

仁 (nucleolus) という

事例６－３おける配分の比較

事例６－３の特性関数　　$v(\{A,B,C\}) = 20,$

$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

任意の配分 $x = (x_A, x_B, x_C)$ について

$$v(\{A,B,C\}) - (x_A + x_B + x_C) = 0,\quad v(\emptyset) - \sum_{i\in\emptyset} x_i = 0$$

$\rightarrow$ $\{A, B, C\}$, $\emptyset$ は除いて考えておいてよい。

$\{A, B\}, \{A,C\}, \{B, C\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}$ について比較すればよい

不満の比較　ー　例

２つの配分　(6, 0, 14) と (12, 4, 4)の比較

	(6, 0, 14)	(12, 4, 4)
{A,B}	6－(6 + 0) = 0	6－(12 + 4) = －10
{A,C}	0－(6 + 14) = －20	0－(12 + 4) = －16
{B,C}	8－(0 + 14) = －6	8－(4 + 4) = 0
{A}	0－6 = －6	0－12 = －12
{B}	0－0 = 0	0－4 = －4
{C}	0－14 = －14	0－4 = －4

(6, 0, 14) → (0, 0, －6, －6, －14, －20)

(12, 4, 4) → (0, －4, －4, －10, －12, －16)

－4 ＜ 0 ゆえ, (12, 4, 4) が (6, 0, 14) より受容的

仁の求め方

仁　：　それよりも受容的な配分の存在しないような配分

→　最大の不満を最小にするものでなければならない

最小化線形計画問題

$M \rightarrow$ 最小化

条件　$e(S, x) \leq M \quad \forall S \subseteq N$　　→「最小コア」

$x \in A$ (配分の全体)　　の解

→　この中で2番目に大きな不満を最小にするものでなければならない

・・・・・・・・・・

仁は，最小化線形計画問題を繰り返し解くことにより求まる

事例６－３の仁 （１）

配分 $x = (x_A, x_B, x_C)$ の不満

$\{A,B\}$	$v(\{A,B\}) - (x_A + x_B) = 6 - (x_A + x_B)$
$\{A,C\}$	$v(\{A,C\}) - (x_A + x_C) = 0 - (x_A + x_C)$
$\{B,C\}$	$v(\{B,C\}) - (x_B + x_C) = 8 - (x_B + x_C)$
$\{A\}$	$v(\{A\}) - x_A = -x_A$
$\{B\}$	$v(\{B\}) - x_B = -x_B$
$\{C\}$	$v(\{C\}) - x_C = -x_C$

最小化問題

$$\min\ M$$

$$6 - (x_A + x_B) \le M,\ -(x_A + x_C) \le M,\ 8 - (x_B + x_C) \le M$$

$$-x_A \le M,\ -x_B \le M,\ -x_C \le M$$

$$x_A + x_B + x_C = 20,\ \ x_A, x_B, x_C \ge 0$$

事例6－3の仁（2）

最小化問題 $\min\ M$

$$6-(x_A+x_B)\le M,\ -(x_A+x_C)\le M,\ 8-(x_B+x_C)\le M$$

$$-x_A\le M,\ -x_B\le M,\ -x_C\le M$$

$$x_A+x_B+x_C=20,\ ,\ \ x_A, x_B, x_C\ge 0$$

↓

$$6-(20-x_C)=-14+x_C\le M,\quad -(20-x_B)=-20+x_B\le M,$$
$$8-(20-x_A)=-12+x_A\le M,\quad -x_A\le M,\ -x_B\le M,\ -x_C\le M$$

↓

$$-M\le x_A\le 12+M,\ -M\le x_B\le 20+M,\ -M\le x_C\le 14+M$$

$$-3M\le x_A+x_B+x_C=20\le 46+3M$$

事例６－３の仁（３）

$-M \le x_A \le 12 + M,\ \ -M \le x_B \le 20 + M,\ \ -M \le x_C \le 14 + M$

$-3M \le x_A + x_B + x_C = 20 \le 46 + 3M$

↓

これを満たす (x_A, x_B, x_C) が存在するための条件は

$M \ge -6,\ \ M \ge -10,\ \ M \ge -7$

$M \ge -20/3,\ \ M \ge -26/3$

↓

これらの条件を満たす最小値は　$M = -6$

$\rightarrow\ \ x_A = 6\ (x_B + x_C = 14),\ \ 6 \le x_B \le 14,\ \ 6 \le x_C \le 8$

(これは配分になっている。）

事例6－3の仁 （4）

$x_A = 6\ (x_B + x_C = 14),\ \ 6 \le x_B \le 14,\ \ 6 \le x_C \le 8$

のなかで2番目に大きな不満の最小化

配分 $x = (6, x_B, 14 - x_B)\ \ (6 \le x_B \le 8)$の不満

{A,B}	$v(\{A,B\}) - (x_A + x_B) = 6 - (6 + x_B) = -x_B$
{A,C}	$v(\{A,C\}) - (x_A + x_C) = 0 - (6 + 14 - x_B) = -20 + x_B$
{B,C}	$v(\{B,C\}) - (x_B + x_C) = 8 - 14 = -6$
{A}	$v(\{A\}) - x_A = -6$
{B}	$v(\{B\}) - x_B = -x_B$
{C}	$v(\{C\}) - x_C = -14 + x_B$

事例6－3の仁 （5）

最小化問題 $\min\ M'$

$$-x_B \le M',\ -20 + x_B \le M',$$

$$-x_B \le M',\ -14 + x_B \le M'$$

↓

$$-M' \le x_B \le 14 + M'$$

↓

最小値は $M' = -7$

$\rightarrow\ x_B = 7,\ x_C = 14 - x_B = 7$

仁 → (6, 7, 7)

事例６－３の仁に基づく費用分担

事例６－３の特性関数（費用軽減分）

$$v(\{A,B,C\}) = 20,$$

$$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

仁　→　20 を 6, 7, 7 に分ける

費用軽減分は 7000 + 5500+ 6500－17000 = 2000万円

→　600万円, 700万円, 700万円に分ける

仁による費用分担額	A：	7000－600 = 6400万円
	B：	5500－700 = 4800万円
	C：	6500－700 = 5800万円

シャープレイ値

提携 S ($i \notin S$) に対するプレイヤー i の貢献度:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

1人ずつ加わって全員提携を形成するときの各プレイヤーの貢献度を考える。例えば, 1, … , i, … , n という全員提携の形成の順列であれば,

i の貢献度は, $v(\{1, \ldots, i-1, i\}) - v(\{1, \ldots, i-1\})$

すべての全員提携の形成(n！通り)が同じ確率でおこるときの各プレイヤーの貢献度の期待値

→ シャープレイ値

事例６－３のシャープレイ値

事例６－３の特性関数　　$v(\{A,B,C\}) = 20,$

$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

	貢献度		
提携形成の順列	A	B	C
A ←B ← C	0	6	14
A ←C ← B	0	20	0
B ←A ← C	6	0	14
B ←C ← A	12	0	8
C ←A ← B	0	20	0
C ←B ← A	12	8	0

シャープレイ値は　(5, 9, 6)

事例６－３のシャープレイ値に基づく費用分担

事例６－３の特性関数（費用軽減分）

$v(\{A,B,C\}) = 20,$

$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

シャープレイ値　→　20 を 5, 9, 6 に分ける

費用軽減分は 7000 + 5500+ 6500－17000 = 2000万円

→　500万円, 900万円, 600万円に分ける

シャープレイ値による費用分担額　A：　7000－500 = 6500万円

B：　5500－900 = 4600万円

C：　6500－600 = 5900万円

シャープレイ値と配分

事例６－３の特性関数

$$v(\{A,B,C\}) = 20,$$

$$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

シャープレイ値　(5, 9, 6)　$\longrightarrow$　配分になっている

一般に，シャープレイ値は

全体合理性を満たす

(N, v) が優加法的であれば，個人合理性も満たす

シャープレイ値と全体合理性

順列	A	B	C
A←B←C	v(A)－v(∅)	v(AB)－v(A)	v(ABC)－v(AB)
A←C←B	v(A)－v(∅)	v(ABC)－v(AC)	v(AC)－v(A)
B←A←C	v(AB)－v(B)	v(B)－v(∅)	v(ABC)－v(AB)
B←C←A	v(ABC)－v(BC)	v(B)－v(∅)	v(BC)－v(B)
C←A←B	v(AC)－v(C)	v(ABC)－v(AC)	v(C)－v(∅)
C←B←A	v(ABC)－v(BC)	v(BC)－v(C)	v(C)－v(∅)

各プレイヤーのシャープレイ値は各列を縦に足して3！で割る

各プレイヤーのシャープレイ値の和は,

→　　すべての要素の和を3！で割ったもの

各行について足せばv(ABC)　→　すべての要素の和は3！v(ABC)

→　　各プレイヤーのシャープレイ値の和は, v(ABC)

シャープレイ値と個人合理性

順列	A	B	C
A←B←C	v(A)−v(∅)	v(AB)−v(A)	v(ABC)−v(AB)
A←C←B	v(A)−v(∅)	v(ABC)−v(AC)	v(AC)−v(A)
B←A←C	v(AB)−v(B)	v(B)−v(∅)	v(ABC)−v(AB)
B←C←A	v(ABC)−v(BC)	v(B)−v(∅)	v(BC)−v(B)
C←A←B	v(AC)−v(C)	v(ABC)−v(AC)	v(C)−v(∅)
C←B←A	v(ABC)−v(BC)	v(BC)−v(C)	v(C)−v(∅)

優加法性から，

1列目の要素 ≥ v(A)，　2列目の要素 ≥ v(B)，　3列目の要素 ≥ v(C)

→　A のシャープレイ値≥ v(A)，　B,C も同様

シャープレイ値の公理系からの導出 （L.S.Shapley）

特性関数形ゲーム (N, v) → 解 $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$

解 x^* の満たすべき性質

1	全体合理性
2	ナルプレイヤーに関する性質
3	対称なプレイヤーに関する性質
4	ゲームの和に関する性質

この4つの性質を満たす解 x^* はただ1つに定まり，

シャープレイ値で与えられる。

４つの性質（１）

１　全体合理性

$$\sum_{i \in N} x^*_i = v(N)$$

２　ナルプレイヤーに関する性質

プレイヤー i がナルプレイヤー

⇔　任意の提携 S ($i \notin S$) に対して，$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$

プレイヤー i がナルプレイヤーであれば，$x^*_i = 0$

４つの性質（２）

３　対称なプレイヤーに関する性質

プレイヤー i, j が対称

$\Leftrightarrow$ 任意の提携 S ($i, j \notin S$) に対して，$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$

プレイヤー i, j が対称であれば，$x^*_i = x^*_j$

４　ゲーム和に関する性質

２つのゲーム $(N, v), (N, u)$ に対して，新たなゲーム (N, w) を

任意の提携 S に対して，$w(S) = v(S) + u(S)$ で定義する

このとき，$(N, v), (N, u), (N, w)$ の解を x^*, y^*, z^* とすれば，

任意のプレイヤー $i \in N$ に対して，$z^*_i = x^*_i + y^*_i$

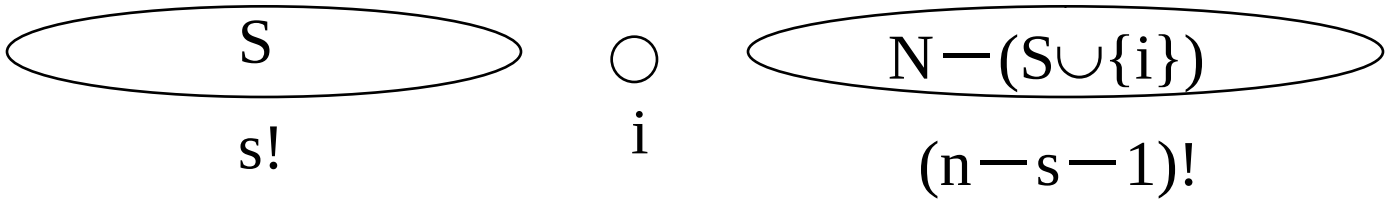
シャープレイ値の公式

シャープレイ値:

n！個の順列における各プレイヤーの貢献度の期待値

プレイヤー i の提携 S に対する貢献度 $v(S\cup\{i\})-v(S)$ は,

$s! \times (n-s-1)!$ 個の順列において現れる。



プレイヤー i のシャープレイ値

$$x^*_i = (1/n!) \sum_{S\subseteq N,\, i\notin S} s! \times (n-s-1)!(v(S\cup\{i\})-v(S))$$

次回までの課題

Reading assignment

「ゲーム理論で解く」 第１章，第３章

Homework

「ゲーム理論入門」 １９４ページ練習問題の１，２

練習問題１の５，６（仁，シャープレイ値に関する部分）