

データ解析（国際開発）

(9) 確率過程論の基礎 2

高田潤一

takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 5 月 17 日

概要

今回は定常確率過程 $X(t)$ の時間軸上での性質を自己相関を用いて検討したが、今回は周波数軸上での性質、具体的にはパワースペクトル密度とウィナー・ヒンチンの定理について説明した後に、定常確率過程の中でもっとも基礎的なガウス過程について説明する。

1 パワースペクトル密度

定常確率過程 $X(t)$ をインパルス応答 $h(t)$ の線形フィルタに入力し、出力される確率過程を $Y(t)$ とする。このときの $Y(t)$ の性質について検討する。

$Y(t)$ は $X(t)$ と $h(t)$ の畳み込み積分

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t - \tau_1)d\tau_1 \quad (1)$$

で表される。

このとき、 $Y(t)$ の期待値 μ_Y は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E[Y(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - \tau_1)]h(\tau_1)d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X h(\tau_1)d\tau_1 \\ &= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 \\ &= \mu_X H(0) \end{aligned} \quad (2)$$

次に、 $Y(t)$ の自己相関関数 $R_Y(\tau)$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t + \tau)Y(t)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t + \tau - \tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau_2)h(\tau_2)d\tau_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)E[X(t + \tau - \tau_1)X(t - \tau_2)]d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(t + \tau - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$E[Y^2(t)]$ は次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}
E[Y^2(t)] &= R_Y(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\exp(i2\pi f\tau_1)df \right] h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f)h(\tau_2)\exp(i2\pi f(\tau_2 - \tau))R_X(\tau)d\tau_1d\tau df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)\exp(i2\pi f\tau_2)d\tau_2 \right] R_X(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f)H^*(f)R_X(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)H^*(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau \right] df
\end{aligned} \tag{4}$$

ただし, 4 行目で $\tau = \tau_2 - \tau_1$ とした. ここで, 自己相関関数 $R_X(\tau)$ のフーリエ変換を

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau \tag{5}$$

と定義すると,

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f)df \tag{6}$$

と表すことができる.

ここで, $H(f)$ として, 中心周波数 f_c , 帯域幅 Δf の理想的な帯域通過フィルタを考える.

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & |f \pm f_c| < \frac{1}{2}\Delta f \\ 0, & |f \pm f_c| > \frac{1}{2}\Delta f \end{cases} \tag{7}$$

すると, Δf が十分小さいときには, 式 (6) は次のように近似できる.

$$E[Y^2(t)] \simeq 2\Delta f S_X(f_c) \tag{8}$$

すなわち, $S_X(f)$ はパワーの周波数軸上の密度を表すと考えられるので, これをパワースペクトル密度と呼ぶ.

2 パワースペクトル密度の性質

式 (5) のように, パワースペクトル密度 $S_X(f)$ は自己相関関数 $R_X(\tau)$ のフーリエ変換として定義される. したがって, 自己相関関数 $R_X(\tau)$ はパワースペクトル密度 $S_X(f)$ のフーリエ逆変換で表される. これらの関係をアインシュタイン・ウィナー・ヒンチンの関係式, もしくはウィナー・ヒンチンの定理と呼ぶ.

ウィナー・ヒンチンの定理より, パワースペクトル密度に関するいくつかの性質が導き出される.

1. 定常確率過程の 2 乗期待値はパワースペクトル密度の全領域にわたる積分に等しい.

$$EX^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df \tag{9}$$

2. 電力スペクトル密度は実数で負の値はとらない.

$$S_X(f) \geq 0, \text{ for all } f \quad (10)$$

3. 電力スペクトル密度は偶関数となる.

$$S_X(-f) = S_X(f) \quad (11)$$

4. 電力スペクトル密度を正規化すると周波数軸上の確率密度分布とみなすことができる.

$$p_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df} \quad (12)$$

3 ガウス過程

中心極限定理より同一な独立分布に従うランダム変数の和は、変数の個数を増やすとガウス分布（正規分布）に漸近する。例えば、熱運動（ブラウン運動）により電流が変動して雑音となるのは、参照面多数の電子が独立に横切るのでガウス分布に従うと考えられ、その時間変化を追っていくとガウス過程となる。定常ガウス過程 $X(t)$ の確率密度関数は、次の式で表される。

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad (13)$$

ガウス過程の特徴は以下の通りである。

1. ガウス過程を線形時不変フィルタに入力すると出力もガウス過程となる。
2. ガウス過程の異なる時刻における値の結合確率は結合ガウス分布で表される。
3. 定常ガウス過程は狭義定常過程となる。
4. ガウス過程の異なる時刻における値が無相関ならば独立である。

課題

ガウス過程が「白色」とあるとはどういう意味があるか調べ、数式で表せ。

締切は5月21日（金）9:00とし、講義開始前に回収する。前日までに提出する場合には、メールボックス S6-4（南6号館ロッカー室横）に提出のこと。表紙は必要ないが、大きさはA4判とし、学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること。

参考文献

- [1] S. Haykin, Communication Systems, 4th eds., Chap. 1, Wiley, 2001.