データ解析（国際開発）
(8) 確率過程論の基礎 1

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 5 月 14 日

概 要

今回から，ランダムな時間関数である確率過程について説明する．本日は確率過程の定義，定常性，平均・相関，エルゴード性などについて説明する．

1　確率過程の定義

確率過程は確率変数を時間関数に拡張したものであり，次のような性質をもつ．

- 事前に関数（波形）は未知である
- 試行により標本関数を取得する ⇒ 標本空間＝標本関数の集合

確率変数の表現と同じように，大文字記号は標本の集合を，小文字記号は個別の標本を表す．

- $X(t)$：確率過程．確率分布により記述される標本関数の集合．
- $x_j(t)$：j 番目の標本関数（実現値）

確率変数と確率過程を対比すると，確率変数は標本が数値であるのに対して，確率過程は標本が関数である．さらに，確率過程が関数であることを考慮すると，確率過程のある時刻における値は確率変数となる．

確率の説明では，よく袋の中から玉を取り出す例が用いられるが，確率過程とは時間関数がたくさん入っている袋からひとつの関数を取り出すようなイメージを考えればよい．

2　確率過程の記述法

確率過程の記述には，確率変数と同じように確率密度関数が用いられる．確率過程では，確率密度関数は時刻 t の関数となる．ある時刻 t における $X(t)$ の値が x 以下となる確率（確率分布関数，累積分布関数）を $P_{X(t)}(x)$ と表す．これを確率変数 x で微分すると確率密度関数 $p_{X(t)}(x)$ が得られる．

$$P_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{\xi} p_{X(t)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

また，これを用いて期待値演算が定義できる．$X(t)$ の関数 $f(X(t))$ の期待値は次のように定義される．

$$\mathrm{E}[f(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{X(t)}(x) \mathrm{d}x \tag{2}$$

また，異なる時刻に対する結合確率も同様に定義できる．ある時刻 t_1 における $X(t_1)$ の値が x_1 以下，時刻 t_2 における $X(t_2)$ の値が x_2 以下となる確率分布関数を $P_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$ と表す．これを確率変数 x_1, x_2 で微分すると 2 時結合確率密度関数 $p_{X(t_1),X_(t_2)}(x_1,x_2)$ が得られる．,

$$P_{X(t_1),X_{t_2}}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\xi_2}\int_{-\infty}^{\xi_1} p_{X(t_1),X(t_2)}(\xi_1,\xi_2) \mathrm{d}\xi_1\xi_2 \tag{3}$$

また，これを用いて期待値演算が定義できる．$X(t_1)$ 及び $X(t_2)$ の関数 $f(X(t_1), X(t_2))$ の期待値は次のように定義される．

$$\mathrm{E}[f(X(t_1), X(t_2))] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2) p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \tag{4}$$

3 次以上の結合確率も同様に定義できる．

3 平均，相関，共分散

平均 $\mu_X(t)$，相関 $R_X(t_1,t_2)$，共分散 $C_X(t_1,t_2)$ は，確率分布の性質を代表的に表す値としてよく用いられ，いずれも期待値演算により定義される．

平均 $\mu_X(t)$ は時刻 t において出現する値の平均値である．

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] \tag{5}$$

（自己）相関 $R_X(t_1,t_2)$ は $X(t_1)$ と $X(t_2)$ の間の類似度を表す指標である．

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] \tag{6}$$

これと類似しているが,（自己）共分散 $C_X(t_1,t_2)$ は平均値からの偏差の相関で定義され，変動成分の類似度を表す指標となる．

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))] \tag{7}$$

4 定常過程

確率的性質，具体的には結合確率密度関数が任意の時刻シフト Δt に対して不変であるときに，確率過程が定常であるという．任意の次数 k に対する結合確率密度関数が定常であることを狭義定常といい，$k = 1, 2$ で成立することを広義定常という．実用上は，3 次以上の結合確率を使用することは殆どないため，定常といえば広義定常を指すと考えてよい．

- 1 次の定常性：$p_X(t) = p_X(t + \Delta t)$
- 2 次の定常性：$p_X(t_1,t_2) = p_X(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$

定常過程では，平均，相関，共分散は次の性質を有する．

- 平均 (5) は時刻に依存しない定数となる．

$$\mu_X(t) = \mu_X \tag{8}$$

- 相関 (6) 及び共分散 (7) は時刻差（ラグ）τ のみの関数となる．

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= R_X(\tau) \quad (9) \\ C_X(t, t+\tau) &= C_X(\tau) \quad (10) \end{aligned}$$

自己相関関数 $R_X(\tau)$ は次の性質を有する．

- $R_X(0)$ は確率過程の 2 乗平均値（エネルギー）を表す．
- $R_X(\tau)$ は偶関数である．
- $R_X(\tau)$ は $\tau = 0$ で最大となる．

自己相関関数は確率過程の時間変動特性を表す．早く変動する確率過程は小さなラグでもゼロになる．この性質を用いて相関時間を R の値がラグ 0 に対して例えば 90 %, 50 %, 1 % など特定な値となるラグ τ の値として定義できる．

相互相関関数は，自己相関関数と同様にして，2 つの確率過程に対する結合確率密度を定義して同様に導出可能であり，2 つの確率過程の間の類似度を表す指標となる．

5　エルゴード過程

実際のデータ解析においては，標本過程を複数観測することが困難な場合が多い．そこで，確率過程が定常であるときには，時間平均（標本平均）と呼ばれる，1 つの標本に対して異なる時刻の値に対する平均をとることが多い．

- 平均

$$\mu_x(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

- 相関

$$R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{12}$$

エルゴード過程とは定常過程のうち集合平均（期待値）と標本平均が一致するものを指し，この性質をエルゴード性という．

集合平均：期待値，標本空間中での平均平均 (1.24)，相関関数 (1.26) エルゴード過程：集合平均と時間平均が一致する定常過程

課題

$R_X(\tau)$ が $\tau = 0$ で最大となるとなることを不等式

$$\mathrm{E}[(X(t+\tau) \pm X(t))^2] \geq 0 \tag{13}$$

を用いて証明せよ．

締切は 5 月 17 日（月）10:30 とし，講義開始前に回収する．前日までに提出する場合には，メールボックス S6-4（南 6 号館ロッカー室横）に提出のこと．表紙は必要ないが，大きさは A4 判とし，学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること．

参考文献

[1] S. Haykin, Communication Systems, 4th eds., Chap. 1, Wiley, 2001.