

データ解析（国際開発）

(5) 短時間フーリエ変換

高田潤一

takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 4 月 23 日

概要

本日は、時間的に性質が変化する時間関数に対する解析法である短時間フーリエ変換 (STFT) を用いて、不確定原理について詳しく説明する。

1 短時間フーリエ変換と不確定性原理

1.1 定義

前回説明した時間軸上の窓関数を用いてフーリエ変換を行うとき、窓の時間的位置を変数として扱うのが短時間フーリエ変換である。周波数特性の時間変化が観測できる。

前回のプリントでは離散的な時間で説明を行ったが、連続的な時間関数でも同様に定義できる。窓関数 $w(t)$ を、時刻 0 が中心となるよう定義する¹。時間関数 $x(t)$ から窓関数により時刻 t 付近の波形成分を切り出す。このとき、注目している時刻 t と波形を定義している時刻 τ の 2 つの時間変数が現れるので注意する。

$$x_{st}(\tau, t) = x(\tau)w(\tau - t) \quad (1)$$

これを τ に関してフーリエ変換すると、時刻 t 付近における短時間スペクトル $X_{st}(f, t)$ が得られる。

$$X_{st}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{st}(\tau, t) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \quad (2)$$

1.2 不確定性原理

前回のプリントで離散フーリエ変換の不確定性原理について簡単に説明したが、ここでは、短時間フーリエ変換を用いてより厳密に定義する。

$x_{st}(\tau, t)$ をエネルギーで正規化した関数 $\eta(\tau, t)$ を考える。

$$\eta(\tau, t) = \frac{x_{st}(\tau, t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x_{st}(\tau, t)|^2 d\tau}} \quad (3)$$

この正規化条件により $|\eta(\tau, t)|^2$ は確率密度関数と同様の振る舞いをする²と見なせる。

¹ 前回プリントの定義とは異なるので注意

² 量子力学における波動関数も同様の振る舞いをしている。

$\eta(\tau, t)$ の平均時間 μ_τ , 持続時間 σ_τ は , それぞれ平均及び標準偏差で定義される .

$$\mu_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau |\eta(\tau, t)|^2 d\tau \quad (4)$$

$$\sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \mu_\tau)^2 |\eta(\tau, t)|^2 d\tau \quad (5)$$

$\eta(\tau, t)$ のフーリエ変換を $H(f, t)$ とする³ .

$$H(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau, t) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \quad (6)$$

ここで , パーセバルの定理 (付録 A 参照) より ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f, t)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |\eta(\tau, t)|^2 d\tau = 1 \quad (7)$$

が成り立つ . そこで , $H(f, t)$ の平均周波数 μ_f , 帯域幅 ω をそれぞれ平均及び標準偏差で定義する .

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} f |H(f, t)|^2 df \quad (8)$$

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu_f)^2 |H(f, t)|^2 df \quad (9)$$

次に $\eta(\tau, t)$ を時間領域及び周波数領域で平行移動し , 平均時間と平均周波数がいずれも 0 となる信号 $\eta_0(\tau)$ を考える .

$$\eta_0(\tau) = \exp\{-i2\pi\mu_f(t + \mu_t)\} \eta(\tau, t) \quad (10)$$

$\eta_0(\tau)$ の持続時間と帯域幅は , $\eta(\tau, t)$ と同一である . このとき ,

$$\sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tau \eta_0(\tau, t)|^2 d\tau \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f H_0(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\tau} \eta_0(\tau) \right|^2 d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

である . 最後の等式にはパーセバルの定理と微分のフーリエ変換の性質を用いた .

これらをシュワルツの不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt \right|^2 \quad (13)$$

に代入すると ,

$$\sigma_\tau^2 \sigma_f^2 \geq \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \eta_0^*(\tau) \frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau} d\tau \right|^2 \quad (14)$$

が成り立つ .

ここで ,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau \eta_0^*(\tau) \frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau} d\tau \right| \geq \left| \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tau \eta_0^*(\tau) \frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \right| \quad (15)$$

³この H は η の大文字である .

であるが，

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tau\eta_0^*(\tau)\frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau}d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\tau\left[\eta_0^*(\tau)\frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau}+\eta_0(\tau)\frac{d\eta_0^*(\tau)}{d\tau}\right]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\tau\frac{d}{d\tau}\left[\eta_0^*(\tau)\eta_0(\tau)\right]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\tau\frac{d}{d\tau}\left[|\eta_0(\tau)|^2\right]d\tau \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}|\eta_0(\tau)|^2d\tau = -1
\end{aligned} \tag{16}$$

である．ただし，最後の部分積分には

$$\lim_{\tau\rightarrow\pm\infty}\tau|\eta_0(\tau)|^2 = 0 \tag{17}$$

を用いた．これより，

$$\begin{aligned}
\sigma_\tau^2\sigma_f^2 &\geq \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tau\eta_0^*(\tau)\frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau}d\tau\right|^2 \\
&\geq \frac{1}{4\pi^2}\left|\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tau\eta_0^*(\tau)\frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau}d\tau\right]\right|^2 \\
&= \frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

すなわち，

$$\sigma_\tau\sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \tag{19}$$

を得る．これが，時間-周波数の不確定性原理の厳密な表現である．次に式 (19) の等号が成り立つ場合を考える．

1. シュワルツの不等式より

$$\tau\eta_0^*(\tau) = \frac{d}{d\tau}\eta_0(\tau)$$

2. 絶対値と実部の不等式より

$$\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tau\eta_0^*(\tau)\frac{d\eta_0(\tau)}{d\tau}d\tau\right]$$

両者を満足する $\eta_0(\tau)$ はガウス関数

$$\eta_0(\tau) = C \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \tag{20}$$

となる．

A パーセバルの定理

パーセバルの定理は，エネルギーに関する時間領域と周波数領域の等価性を表す．

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df \tag{21}$$

課題

式 (21) を証明せよ .

ヒント : 左辺を

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft)df \right] x^*(t)dt$$

と置く .

締切は 4 月 30 日 (金) 9:00 とし , 講義開始前に回収する . 前日までに提出する場合には , メールボックス S6-4 (南 6 号館ロッカー室横) に提出のこと . 表紙は必要ないが , 大きさは A4 判とし , 学籍番号 ・ 氏名 ・ 提出日を上部欄外に記入すること .

参考文献

- [1] L. コーエン (著) , 吉川昭 , 佐藤俊輔 (訳) , 時間 - 周波数解析 , 第 3 章及び第 7 章 , 朝倉書店 , 1998 .
- [2] Mark A. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Chap. 2, American Mathematical Society, 2009.