データ解析（国際開発）
(4) 離散フーリエ変換

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 4 月 23 日

概 要

本日は，離散化されたデータ系列に対するフーリエ変換である離散フーリエ変換 (DFT)，有限のデータ系列に適用する窓関数，DFT の高速計算手法である高速フーリエ変換 (FFT) について説明する．

1 離散フーリエ変換

1.1 定義

連続的な時間関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ は，

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-\mathrm{i}2\pi f t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

で表され，これに対するフーリエ逆変換は，

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(\mathrm{i}2\pi f t)\mathrm{d}f \tag{2}$$

で表される．

一方，実験や調査などで得られるデータは，有限長の時系列である．これに対する周波数解析手法が離散フーリエ変換である．N 個のデータ系列 x_n ($n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$) に対して，離散フーリエ変換 (DFT) X_k は

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\mathrm{i}2\pi \frac{n}{N} k\right) \tag{3}$$

で表され，これに対する離散フーリエ逆変換 (IDFT) は，

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\mathrm{i}2\pi \frac{k}{N} n\right) \tag{4}$$

で表される．このとき，式 (3) 及び (4) の指数関数の周期性より，x_k 及び X_n はいずれも周期 N の周期系列となる．

表 1: 時間周波数の分解能と範囲

領域＼パラメタ	分解能	範囲
時間 [s]	Δt	$N\Delta t$
周波数 [Hz]	$\dfrac{1}{N\Delta t}$	$\pm\dfrac{1}{2\Delta t}$

1.2 変数の分解能と範囲

DFT/IDFT における時間及び周波数に関する分解能と範囲は次のように整理できる．

x_n の時間間隔（標本化間隔）を Δt [s] とする．このとき，時間分解能は Δt [s]，時間範囲は $\Delta T = N\Delta t$ [s]，時刻は $t_k = k\Delta t$ [s] となる．

標本化定理より，周波数範囲は時間分解能の逆数として $\Delta F = \frac{1}{2\Delta t}$ [Hz] となる．ここで現れる $\frac{1}{2}$ は，帯域幅の対称性と周波数軸上の周期性から説明される．正の周波数と負の周波数は，複素フーリエ解析の便宜上現れているものであり，$x(t)$ あるいは x_k が実数であれば，正の周波数のスペクトルと負の周波数のスペクトルは必ず互いに複素共役になる．これが，帯域幅の対称性である．DFT では正の周波数成分しか考慮していないように見えるが，$\frac{1}{2} < \frac{k}{N} < 1$ となる範囲は，周波数軸上の周期性より，実際には $-\frac{1}{2} < \frac{k}{N} < 0$ の範囲を表している．周波数分解能は $\Delta f = \frac{2\Delta F}{N} = \frac{1}{\Delta T}$ [Hz] であり，周波数は

$$f_n = \begin{cases} n\Delta f, & 0 \le n \le \frac{N}{2} \\ (n-N)\Delta f, & \frac{N}{2} < n < N \end{cases} \quad \text{[Hz]}$$

となる．以上を Δt と N を用いて整理し，表 1 に示す．

次回以降に詳しく説明するが，$\Delta f \Delta T = 1$ の関係を**時間–周波数の不確定性原理**という．

1.3 性質

離散フーリエ変換もフーリエ変換あるいはフーリエ級数展開とほぼ同様の性質を有する．以下では離散フーリエ変換対を $\overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow}$ で表す．

線形性

$$a x_n + b y_n \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} a X_k + b Y_k \tag{5}$$

推移則

$$x_{n-l} \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} X_k \exp\left(-\mathrm{i}2\pi \frac{l}{N} k\right) \tag{6}$$

$$X_{k-l} \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} x_n \exp\left(\mathrm{i}2\pi \frac{l}{N} n\right) \tag{7}$$

畳み込み

$$\sum_{l=0}^{N-1} h_{n-l} x_l \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} H_k X_k \tag{8}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_{k-l} X_l \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} h_n x_n \tag{9}$$

相関

$$\sum_{l=0}^{N-1} x_l y_{n+l} \overset{\mathcal{DF}}{\longleftrightarrow} X_k^* Y_k \tag{10}$$

2　窓関数

前節で述べたように，時系列に DFT を適用する場合，有限の時系列を無限の周期時列として扱うため，有限区間のデータの両端に不連続があると，元の波形と大きく異なる振る舞いをする．この影響を小さくするためには，時系列の長さを十分に確保するとともに，不連続部の寄与を小さくするための窓関数を使用して，接続部における急激な時間変化を取り除く．

窓関数（系列）を w_k とすると，

$$y_k = w_k x_k \tag{11}$$

のように用いる．このとき，

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-1} W_{n-l} X_l \tag{12}$$

である．窓関数を使用すると，周波数領域でのサイドローブが抑圧される代わりに，メインローブ幅が広がる．

方形窓　方形窓は窓関数を使用しない状態に相当する．サイドローブが約 −13 dB と高い．

$$w_{\mathrm{rect},n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

ハミング窓　サイドローブを約 −60 dB 抑圧することができる．

$$w_{\mathrm{Ham},n} = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \sin\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

3　高速フーリエ変換

高速フーリエ変換 (FFT) は DFT の一種である．計算法の工夫に関する説明は省略するが，DFT の計算時間が N^2 に比例するのに対して，FFT の計算時間は $N \log_2 N$ に比例する．通常の FFT では，N は 2 のべき乗とする必要がある．

課題

式 (3) を式 (4) の右辺に代入し，式 (4) の等号が成立することを示せ．

締切は 4 月 26 日（月）10:40 とし，講義開始前に回収する．前日までに提出する場合には，メールボックス S6-4（南 6 号館ロッカー室横）に提出のこと．表紙は必要ないが，大きさは A4 判とし，学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること．

参考文献

[1] 谷萩隆嗣，ディジタル信号処理の理論 1 基礎・システム・制御，第 6 章，コロナ社，1985