データ解析（国際開発）
(2) 時間関数の離散化

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 4 月 16 日

概 要

本日は，前回の補足説明をした後に，標本化と呼ばれる時間関数の離散化について説明する．

1 線形システムの復習

1.1 インパルス応答（補足）

線形時不変システムにおいては，デルタ関数 $\delta(t)$ を入力した場合の出力 $h(t)$ が判れば，任意の入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{1}$$

で表される．$h(t)$ をインパルス応答，式 (1) の積分を畳み込み積分といい，記号 $x(t) * h(t)$ または $(x * h)(t)$ で表す．これは，入力 $x(t)$ を Δt 間隔のインパルス列で近似し，インパルス応答を係数 $x(n\Delta t)$ 倍し，$n\Delta t$ だけ時間シフトして重ね合わせたものであるといえる（図 1）.

1.2 伝達関数

畳み込み積分に関するフーリエ変換の公式

$$x(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)H(f) \tag{2}$$

を用いると，周波数領域では入力スペクトル $X(f)$ と出力スペクトル $Y(f)$ との関係は，周波数成分ごとに比例定数 $H(f)$ 倍となる．この $H(f)$ を伝達関数という．

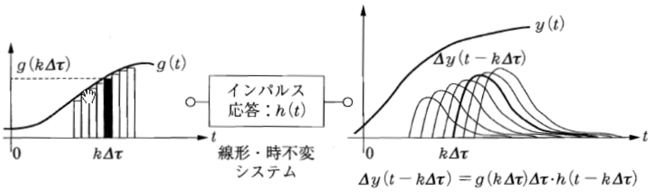

図 1: 畳み込み積分の原理（[1] より引用）

式 (2) は次のように証明できる．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\exp(-\mathrm{i}2\pi f t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-\mathrm{i}2\pi f t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{H(f)\exp(-\mathrm{i}2\pi f\tau)\}\mathrm{d}\tau \\
&= H(f)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-\mathrm{i}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= X(f)H(f) \qquad (3)
\end{aligned}$$

2 標本化

2.1 標本化とスペクトル

連続的な時間関数を，適当な時間間隔で標本化 (sampling) したときに，元の時間関数を忠実に表現できる条件を考える．

連続関数 $x(t)$ を間隔 T_s で標本化した関数 $x_\mathrm{s}(t)$ は次の式で表される．

$$x_\mathrm{s}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_\mathrm{s})\delta(t-kT_\mathrm{s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\delta(t-kT_\mathrm{s}) \qquad (4)$$

ただし，$x_k = x(kT_\mathrm{s})$ は標本化された時系列である．

インパルス列 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s})$ は周期 T_s の周期関数となるので，次のようにフーリエ級数展開できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp\left(\mathrm{i}2\pi n\frac{t}{T_\mathrm{s}}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp(\mathrm{i}2\pi n f_\mathrm{s} t) \qquad (5) \\
c_n &= \frac{1}{T_\mathrm{s}}\int_{-\frac{T_\mathrm{s}}{2}}^{\frac{T_\mathrm{s}}{2}}\delta(t)\mathrm{d}t = f_\mathrm{s} \qquad (6)
\end{aligned}$$

ただし，$f_\mathrm{s} = \frac{1}{T_\mathrm{s}}$ を標本化周波数という．これを用いると，インパルス列 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s})$ のフーリエ変換もインパルス列になる．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s})\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi f t)\mathrm{d}t &= f_\mathrm{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}2\pi n f_\mathrm{s} t) \\
&= f_\mathrm{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_\mathrm{s}) \qquad (7)
\end{aligned}$$

したがって，標本化した関数 $x_\mathrm{s}(t)$ のスペクトル $X_\mathrm{s}(f)$ は，次の式で表される．

$$\begin{aligned}
X_\mathrm{s}(f) &= X(f) * f_\mathrm{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_\mathrm{s}) \\
&= f_\mathrm{s}\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\nu-nf_\mathrm{s})\mathrm{d}\nu \\
&= f_\mathrm{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f+nf_\mathrm{s})
\end{aligned}$$

$$= \quad f_{\mathrm{s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_{\mathrm{s}}) \tag{8}$$

すなわち，$X_{\mathrm{s}}(f)$ は $X(f)$ を f_{s} 間隔で平行移動したものの重ね合わせで表される周期関数となる．

2.2 再構成とエリアジング

2.2.1 完全再構成

時間関数 $x(t)$ が周波数 $\frac{w}{2}$ で帯域制限されている，すなわち

$$X(f) = 0,\ f > \frac{w}{2} \tag{9}$$

と仮定する．

もしも $f_{\mathrm{s}} < w$ であれば，スペクトル $X_{\mathrm{s}}(f)$ は周波数軸上で分離し，

$$X_{\mathrm{s}}(f) = X(f),\ -\frac{f_{\mathrm{s}}}{2} < f < \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} \tag{10}$$

が成り立つ．すなわち，理想的な低域通過フィルタ

$$H(f) = \begin{cases} T_{\mathrm{s}}, & |f| < \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} \\ 0, & |f| > \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} \end{cases} \tag{11}$$

を用いることにより，

$$X(f) = X_{\mathrm{s}}(f) H(f) \tag{12}$$

が成立する．すなわち，この場合は，標本化された時系列から元の時間関数を完全に再構成することが可能となる．低域通過フィルタのインパルス応答は次の式で表される．

$$\begin{aligned} h(t) &= T_{\mathrm{s}} \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(\mathrm{i}2\pi f t) \mathrm{d}f \\ &= T_{\mathrm{s}} \int_{-\frac{f_{\mathrm{s}}}{2}}^{\frac{f_{\mathrm{s}}}{2}} \exp(\mathrm{i}2\pi f t) \mathrm{d}f \\ &= \frac{\sin \pi f_{\mathrm{s}} t}{\pi f_{\mathrm{s}} t} \\ &= \mathrm{sinc}(f_{\mathrm{s}} t) \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，sinc 関数は次のように定義される．

$$\mathrm{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \tag{14}$$

sinc 関数は引数が 0 のときに 1，それ以外の整数のときに 0 となる性質をもつ．元の時間関数 $x(t)$ は標本化した時間関数 $x_{\mathrm{s}}(t)$ を用いて，次のように再構成される．

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\mathrm{s}}(t) * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT_{\mathrm{s}}) * \mathrm{sinc}(f_{\mathrm{s}} t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \mathrm{sinc}\{f_{\mathrm{s}}(t - kT_{\mathrm{s}}) t\} \end{aligned} \tag{15}$$

このように，標本化間隔 T_{s} を $\frac{1}{w}$ 以下で標本化した場合には，補間関数として sinc 関数を用いることにより，元の時間波形の完全再構成が可能であることを**染谷・シャノンの標本化定理**といい，標本間隔の上限 $\frac{1}{w}$ を**ナイキスト間隔**という．

2.2.2　エリアジング

一方，$f_\mathrm{s} > w$ の場合には，スペクトル $X_\mathrm{s}(f)$ は周波数軸上で分離せず，互いに重複したものとなってしまう．この場合に，sinc 関数を用いて補間を行うと，w 以上の周波数成分が，すべて f_s の整数倍だけ周波数シフトして重畳されたように見える．このような現象をエリアジングと呼ぶ.

課題

次回実習のため課題は出さない.

TA と次回講義

次回は，実習は IDE ラウンジ隣の PC 室で行う．なお，実習には TA として劉妍然（高田研, liu@ap.ide.titech.ac.jp）が参加する.

参考文献

[1] 斉藤洋一，信号とシステム，第 2 章，コロナ社，2003.

[2] 斉藤洋一，信号とシステム，第 6 章，コロナ社，2003.