データ解析（国際開発）
(9) 演習：確率過程の例

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 5 月 21 日

概 要

確率過程を実感してもらうために，前倒しで実習を行う．対象とする定常確率過程は，全方位から多重波が一様に到来する場合の空間電界分布である．ここでは位置の関数として確率過程を説明するが，等速直線移動 $x = vt$ を考えれば，時間の関数とみなすことができる．

1　確率過程の例：多重波干渉

定常確率過程として，ここでは移動通信環境における多重波干渉（図 1）を例にとる．移動通信環境では建物など様々な物体で電波が反射され，受信点では多数の経路を経た到来波が互いに合成され，これらの干渉による空間的な定在波が発生する．

$$e(x) = \sum l = 1^L e_l \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l x + \psi_l) \tag{1}$$

e_l は第 l 波の振幅，ψ_l は $x = 0$ における位相,

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\vartheta_l + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\vartheta_l) \tag{2}$$

は波数ベクトル，φ_l は x 方向から測った到来波の到来角である．

定在波の空間分布 $e(x)$ は定常確率過程で表現される．図 2 のように全方向から一様に多重波が到来すると仮定すると，角度 φ に対するパワースペクトル密度 $S_\Phi(\varphi)$ は次のように表される．

$$S_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi},\ 0 \le \varphi < 2\pi \tag{3}$$

これを，x に関する空間周波数

$$\nu_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{\cos\varphi}{\lambda} \tag{4}$$

に対するパワースペクトル密度に変換すると，

$$\begin{aligned} S_{N_x}(\nu_x) &= S_\Phi(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu_x} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{k\sqrt{1-\nu_x^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

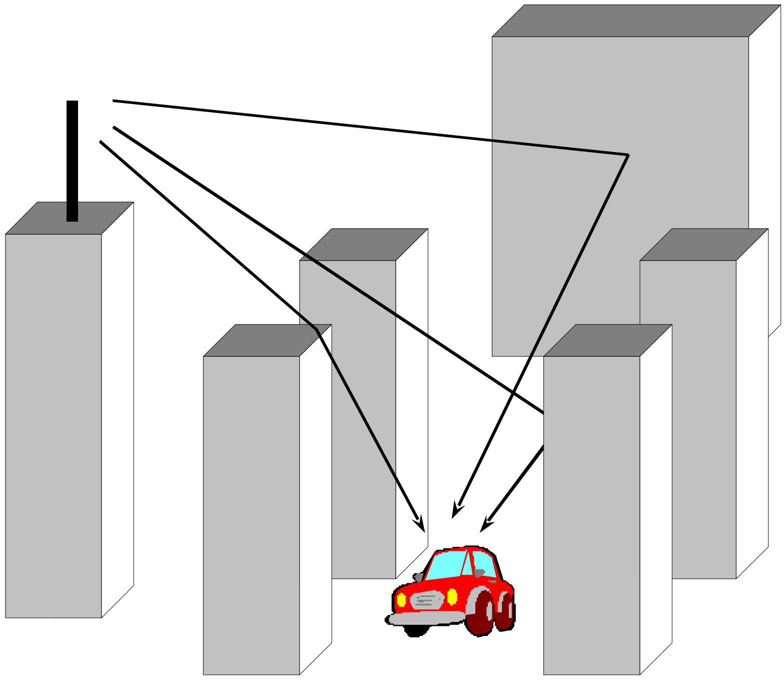

図 1: 移動通信環境における多重波伝搬の様子

となる．アインシュタイン・ウィナー・ヒンチンの定理より自己相関関数を求めると

$$\begin{aligned} R_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_x}(\nu_x)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x x)\mathrm{d}\nu_x \\ &= \frac{\lambda}{2}J_0(kx) \end{aligned} \tag{6}$$

となる．ただし，$J_0(z)$ は第 1 種ベッセル関数である．

2　標本過程発生のシミュレーション

前節で説明した確率過程の標本をシミュレーションにより発生させる．

角度パワースペクトル (3) を模擬するために，等角度間隔に等振幅の到来波を仮定する．

$$e(x) = \sum_{l=1}^{L}\exp(-\mathrm{i}k\cos\varphi_l x + \psi_l) \tag{7}$$

$$\varphi_l = \frac{2\pi\left(l-\frac{1}{2}\right)}{L} \tag{8}$$

初期位相 ψ_l は

$$p(\psi_l)\frac{1}{2\pi},\ 0 \le \psi < 2\pi \tag{9}$$

の乱数とする．図 3 は後で説明するシミュレーションの実行例である．波長より短い間隔で大きさが変動すること，変動は不連続ではなく連続的であることなどがわかる．

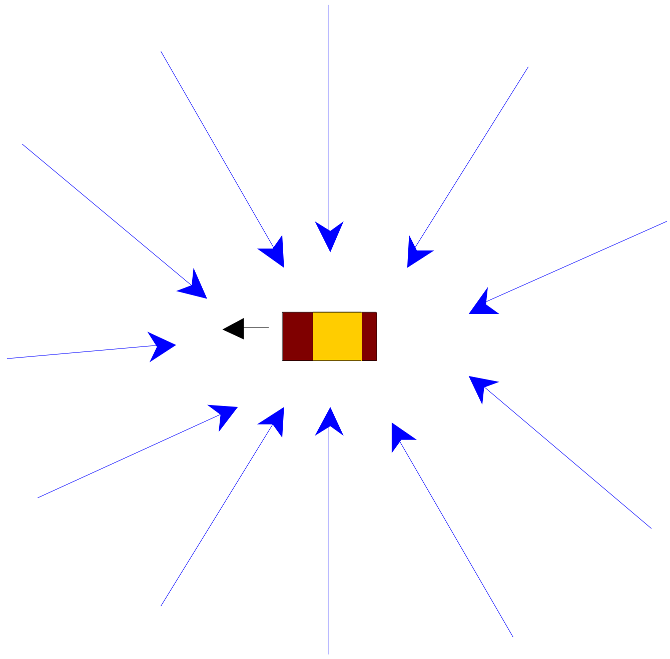

図 2: 多重波の到来方向分布が一様な場合

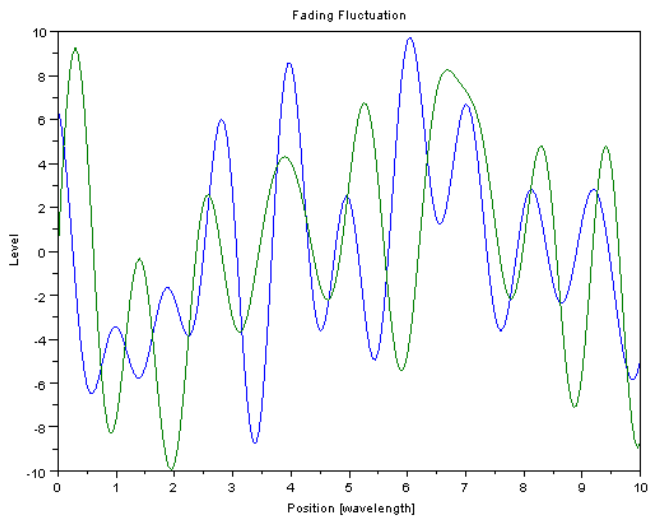

図 3: 多重波干渉のシミュレーション例（実部及び虚部）

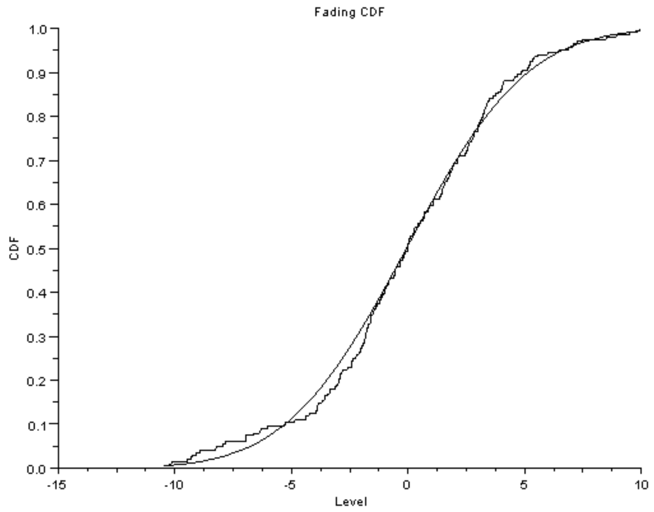

図 4: 多重波干渉のシミュレーション例：実部の累積相対度数

また，中心極限定理より L が大きければ実部，虚部はそれぞれ独立な正規分布となる．図 3 の実部に対する累積相対度数分布を，正規分布の理論値と比較して図 4 に示す．試行毎に分布は変化するが，ほぼ正規分布に従う．

標本自己相関関数を自己相関関数の理論値と比較して図 5 に示す．シミュレーションを繰り返すと，必ずしも理論値と標本値が一致しない場合もある．この理由としては，エルゴード性が成立するのに十分な標本数を取っていない場合と，初期位相の設定によってエルゴード性が実現されない場合の両方が考えられる．

3 プログラム

```
// Sum-of-sinusoid method to generate complex Gaussian process

l = 32; // number of scatterers

dx = .05; // position step measured by wavelength
xmax = 10; // last position measured by wavelength
x = [0:dx:xmax]; // position vector
nx = size(x,2); // number of positions = number of columns of x

ph = ([0:l-1]' + .5) * 2 * %pi / l; // angles of arrival
k = 2 * %pi * cos(ph); // wavenumber

e0 = exp(%i * 2 * %pi * rand(l,1,'uniform')); // initial phase
ep = exp(%i * k * x) .* kron(e0, ones(1,nx)); // multipath phase
```

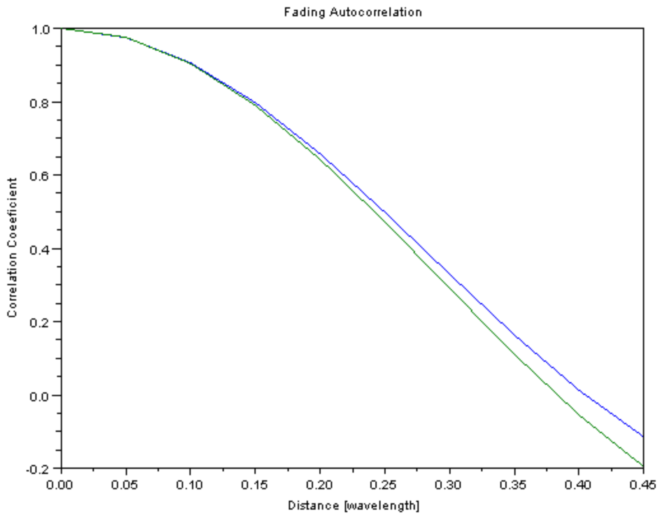

図 5: 多重波干渉のシミュレーション例：標本自己相関関数

```
ec = ones(1,l) * ep; // coherent sum of multipath
er = real(ec); // real part
ei = imag(ec); // imaginary part

clf(); plot(x,er,x,ei); // plot fading
xtitle('Fading Fluctuation', 'Position [wavelength]', 'Level');
pause;

ers = gsort(er, 'g', 'i'); // sort for emprical distribution of real part
// eis = gsort(ei, 'g', 'i'); // sort for emprical distribution of imaginary part
ed = [1:nx] / nx; // empirical distribution
clf(); plot2d2(ers,ed); // plot emprical distribution

// mu = 0; // mean
// sigma = 1 / sqrt(2); // standard deviation
mu = mean(ers); // mean
sigma = stdev(ers); // standard deviation
cdg = 0.5 + 0.5 * erf((ers - mu) / (sqrt(2) * sigma)); // Gaussian CDF
plot2d(ers, cdg); // plot theoretical distribution
xtitle('Fading CDF', 'Level', 'CDF');
pause;

// Autocorrelation
rnc = 1 / 20; // range of lag with respect to total length
```

```
nc = nx * rnc; // number of lag samples
ncs = nx - nc; // number of correlating samples
for n = 1 : nc
 eac(n) = ec(1 : ncs) * ec(n : n + ncs - 1)'; // autocorrelation
end
edenom = eac(1); // autocorrelation with zero lag
eac = eac / edenom; // normalization
clf();
plot(x(1 : nc), real(eac(1 : nc)), x(1 : nc), besselj(0, 2 * %pi * x(1 : nc))); // empirical and
xtitle('Fading Autocorrelation', "Distance [wavelength]', 'Correlation Coeeficient');
```

時系列の発生では，一旦各正弦波成分を行列に代入してから，最後に各要素が 1 のベクトルを乗算して和を取っている．

累積相対度数分布は，一旦標本を昇順にソートしてから plot2d2 という階段表示コマンドを使用して表示している．また，累積確率分布の計算には，誤差関数

$$\mathrm{eff}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t \tag{10}$$

を用いている．誤差関数 $\mathrm{erf}(x)$ は，平均 0，分散 $\frac{1}{2}$ の正規分布で値が 0 から x までの間に入る確率を表す特殊関数である．平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の累積確率 $P(x)$ は $\mathrm{erf}(x)$ を使用して，

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \tag{11}$$

で求められる．

標本自己相関を求める方法は色々あるが，ここではラグの値によって標本の外の計算をしなくて良いように，標本系列の部分列に対して標本相関をとり，また比較しやすいように最大値（ラグ 0）で正規化して表示している．

課題

角度パワースペクトルを変化させて，標本過程とその自己相関を出力し，考察を加えよ．締切は 5 月 24 日（月）10:40 とし，講義開始前に回収する．前日までに提出する場合には，メールボックス S6-4（南 6 号館ロッカー室横）に提出のこと．表紙は必要ないが，大きさは A4 判とし，学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること．

参考文献

[1] 唐沢好男, ディジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2003.